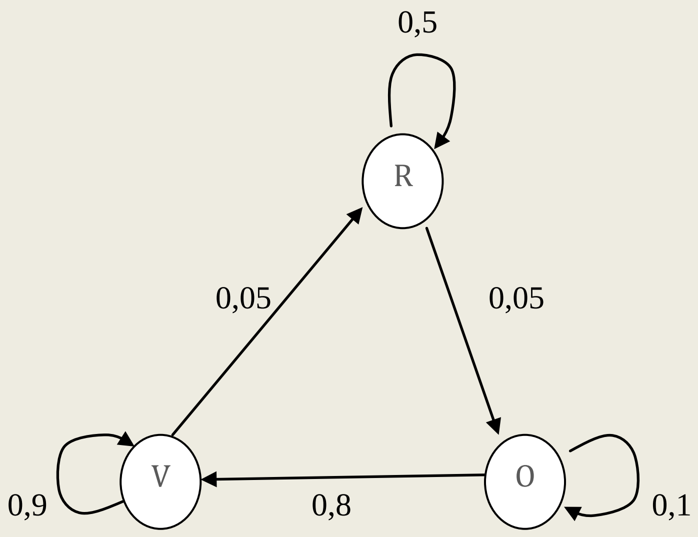
1.a. Etape 1 : on distingue trois états pour le feu tricolore : vert (V), orange (O) et rouge (R).

On représente les changements d'états et on indique les probabilités associées indiquées dans l'énoncé.



Etape 2 : la somme des probabilités partant de chaque état doit être égale à 1, ce qui permet de déterminer les autres probabilités.

On obtient le graphe figurant page 132 du manuel.

b. Il s'agit de former la matrice suivante :

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & O & R \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ O \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} P_V(V) & P_V(O) & P_V(R) \\ P_O(V) & P_O(O) & P_O(R) \\ P_R(V) & P_R(O) & P_R(R) \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}45 & 0{,}05 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Remarque

On vérifie que la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice M est égale à 1. Ceci correspond au fait que, sur le graphe, la somme des probabilités partant d'un état est égale à 1.

2. a. $P_1 = (V_1 \quad O_1 \quad R_1)$. Le premier feu rencontré étant vert, on a $V_1 = 1$, $O_1 = 0$ et $R_1 = 0$ d'où $P_1 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

$$P_2 = P_1 \times M = (1 \;\; 0 \;\; 0) \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}45 & 0{,}05 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (0{,}9 \quad 0{,}05 \quad 0{,}05)$$

b. $P_3 = P_2 \times M = (0{,}9 \quad 0{,}05 \quad 0{,}05) \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}45 & 0{,}05 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (V_3 \quad O_3 \quad R_3)$

donc

$V_3 = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}05 \times 0{,}8 + 0{,}05 \times 0{,}45 = 0{,}8725$

$O_3 = 0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}05 \times 0{,}1 + 0{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}0525$

$R_3 = 0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}05 \times 0{,}1 + 0{,}05 \times 0{,}5 = 0{,}075$

La probabilité que la troisième feu soit vert est $V_3 = 0{,}8725$.

3. Dans ce cas $V_1 = 0$, $O_1 = 0$ et $R_1 = 1$ d'où $P_1 = (0 \quad 0 \quad 1)$.

$P_8 = (V_8 \quad O_8 \quad R_8)$ donc, quand le premier feu est rouge, la probabilité :
▪ que le huitième feu soit vert est 0,85 à 10^{-2} près

▪ que le huitième feu soit orange est 0,05 à 10^{-2} près

▪ que le huitième feu soit rouge est 0,1 à 10^{-2} près