Chapitre 3 – Objectif Bac – page 93

1. B × A =).

B × A = ( ) soit B × A = 5( ) et donc B × A = 5I où I désigne la matrice unité.

Par suite si AX = Y, on a, en multipliant les deux membres de l'égalité par B à gauche :
BAX = BY.

Or BA = 5I d'où 5IX = BY.

Mais IX = X d'où finalement 5X = BY.

2. a. D'après le tableau page 198, O est codé par x_1 = 14 et U par x_2 = 20 d'où X =).

Donc Y = soit Y = =).

Comme 76 = 2 × 26 + 24 et 82 = 3 × 26 + 4 on a r_1 = 24 et r_2 = 4 d'où R = ( ).

Par lecture inverse du tableau, la première lettre est Y (représentée par 24) et la deuxième E (représentée par 4) d'où le mot YE.

b. De même, pour ET, on a x_1 = 4 et x_2 = 19 d'où X =).

Donc Y = ( )( ) soit Y = ( ) = ( ).

Comme 35 = 1 × 26 + 9 et 50 = 1 × 26 + 24 on a r_1 = 24 et r_2 = 4 d'où

R = qui correspond au mot JY.

3. a. Pour que 5*k*-1 soit divisible par 26, il faut que le reste de la division de 5*k* par 26 soit égal à 1.

D'où le programme :

```
Pour k de 0 à 25 Faire
  Affecter à r le reste dans la division
de 5k par 26
    Si r = 1 alors afficher k
    Fin Si
Fin pour
```

L'utilisation du programme donne *k* = 21.
Vérification 5 × 21 = 105 et 105 = 4 × 26 + 1.

On a donc bien 5*k* ≡ 1 (26).

b. Les entiers x_1, x_2, y_1 et y_2 sont liés par Y = AX et d'après le 1. par 5X = BY.

Or 5X = et BY = soit BY = $\big)$.

On a donc bien

c. Multiplions alors les deux membres de chaque égalité par 21 :

Considérons alors les égalités correspondantes modulo 26.
D'après le 3.a, on a 105 ≡ 1 (26).
Or, 42 = 26 + 16 donc 42 ≡ 16 (26), -21 = -26 + 5 donc -21 ≡ 5 (26)

et-63 = -3 × 26 + 15 donc -63 ≡ 15 (26).

Enfin, 84 = 3 × 26 + 6 donc 84 ≡ 6 (26).

On a donc bien

d. On part du mot codé QP.

La première lettre Q est représentée par $y_1 = 16$ et la deuxième P par $y_2 = 15$.

D'après la question ci-dessus, les lettres du mot d'origine sont donc représentées

par les entiers x_1 et x_2 tels que $x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2$ (26) et $x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2$ (26).
Or $16 \times y_1 + 5 \times y_2 = 16 \times 16 + 5 \times 15 = 331$ et $15 \times y_1 + 6 \times y_2 = 15 \times 16 + 6 \times 15 = 320$.
x_1 et x_2 sont donc deux entiers compris entre 0 et 26 tels que $x_1 \equiv 331$ (26) et $x_2 \equiv 320$ (26).
Ce sont les restes modulo 26 de 320 et 321.

Or 331 = 12 × 26 + 19 et 320 = 12 × 26 + 8 donc la première lettre du mot cherché

est représentée par l'entier 19, il s'agit de T et la deuxième par l'entier 8, il s'agit de I.
QP est le mot codé de TI.