Partie A

1. Il suffit de vérifier que $11 \times (-7) - 26 \times (-3) \;=\; 1$, ce qui est bien le cas. Le couple $(-7\,;\,-3)$ est donc une solution de l'équation (E).

2. Soit x et y deux entiers.

$(x\,,y)$ est solution de (E) si et seulement si $11x - 26y = 1$.

Or $11x - 26y = 1 \Leftrightarrow 11x - 26y = 11 \times (-7) - 26 \times (-3)$

$\Leftrightarrow 11(x+7) = 26(y+3) \qquad$ (E')

▪ **Si (x, y) est une solution de (E),** on a donc $11(x+7) = 26(y-3)$.

Comme $x + 7$ est un entier, on en déduit que 11 divise $26(y-3)$. Comme 11 et 26 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, on en déduit que 11 divise $y - 3$.

Par conséquent il existe un entier k tel que $y + 3 = 11k$.

De même, 26 divise $11(x+7)$ et, par le théorème de Gauss, 26 divise $x + 7$.

Il existe donc un entier k' tel que $x + 7 = 26k'$.

On a donc $(x\,;y) = (-7 + 26k'\,;\,-3 + 11k)$.

▪ **Réciproquement,** le couple $(-7 + 26k'\,;\,-3 + 11k)$ est solution de (E') si et seulement si $11 \times 26k' = 26 \times 11k$ soit $k' = k$.

Conclusion : les couples solutions de (E) sont les couples $(x\,;y) = (-7 + 26k\,;\,-3 + 11k)$, où k est un entier relatif quelconque.

Remarque

Pour $k = 0$, on retrouve le couple solution donné à la question 1.

3. On cherche un couple solution $(u\,;v)$ tel que $0 \leq u \leq 25$.

Il existe k entier tel que $(u\,;v) = (-7 + 26k\,;\ -3 + 11k)$ et
$0 \leq u \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq -7 + 26k \leq 25 \Leftrightarrow \frac{7}{26} \leq k \leq \frac{32}{26}$.

Sachant que k est un entier, il n'y a qu'une seule possibilité à savoir $k = 1$.

On en déduit qu'il n'existe qu'un seul couple $(u\,;v)$ solution de (E) tel que
$0 \leq u \leq 25$: le couple $(-7 + 26 \times 1\,;\ -3 + 11 \times 1) = (19\,;8)$.

Partie B

1. Pour la lettre W, on a $x = 22$ dans le tableau.

Alors $11x + 8 = 11 \times 22 + 8 = 250$.

Or $250 = 26 \times 9 + 16$ avec $0 \leq 16 < 26$, donc le reste dans la division euclidienne de 250 par 26 est 16.

On a donc $y = 16$, qui correspond dans le tableau à la lettre Q.

Par conséquent la lettre W est codée Q.

2. a. On sait que $11 \times 19 - 26 \times 8 = 1$ car le couple $(19\,;8)$ est solution de (E) (question A.3).

Donc $11 \times 19 = 1 + 26 \times 8$ et par conséquent $11 \times 19 \equiv 1$ (*modulo* 26).

▪ Alors **si $\boldsymbol{11x \equiv}$ (*modulo* 26)** , on a, en multipliant chaque membre par 19 :

$$19 \times 11x \equiv 19\,j \ (modulo\ 26) \text{ soit } x \equiv 19\,j \ (modulo\ 26)$$

▪ **Réciproquement, si $\boldsymbol{x \equiv 19\,j}$ (*modulo* 26)**, en multipliant chaque membre par 11, on obtient $11x \equiv 11 \times 19j$ (*modulo* 26) soit

$11x \equiv$ (*modulo* 26) .

On a donc prouvé que $11x \equiv j$ ($modulo$ 26) $\Longleftrightarrow x \equiv 19\, j$ ($modulo$ 26).

Remarque

On a démontré l'équivalence demandée en deux temps, « dans un sens puis dans l'autre ».

b. Connaissant la lettre codée, on lui associe le nombre y par le tableau qui est donné. Soit x le nombre associé à la lettre décodée dans le tableau

On sait donc que $11x + 8 \equiv y$ ($modulo$ 26) soit $11x \equiv y - 8$ ($modulo$ 26), d'où par la question précédente, $x \equiv 19(y - 8)$ ($modulo$ 26).

De plus x est compris entre 0 et 25, donc x est le reste dans la division par 26 de $19(y - 8)$.

On peut donc donner le procédé de décodage :

A la lettre codée, associer le nombre y donné dans le tableau.

Calculer le reste x dans la division de $19(y - 8)$ par 26.

La lettre associée à x dans le tableau est la lettre décodée.

Application : décodage de la lettre W

Pour W, on a $y = 22$ donc $19(y - 8) = 266$.

Le reste dans la division de 266 par 26 est 6.

La lettre décodée est donc G.