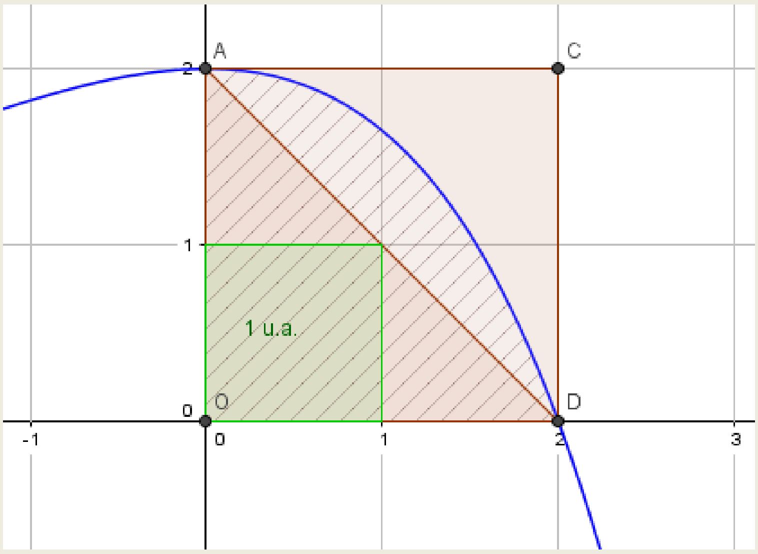
Chapitre 5 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

1. Sur le graphique ci-dessous, on peut interpréter cette intégrale comme la mesure de l'aire, en u.a., de la portion du plan hachurée comprise entre la courbe représentant *f*, en bleu, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



Cette aire est supérieure à l'aire du triangle OAD qui est égale à 2 u.a ET elle est inférieure à celle du rectangle OACD qui est égale à 4. Par conséquent, 2 ≤ $\int_0 f(x)dx$ ≤ 4.

2. a. *F* est dérivable sur ℝ. Calculons $F'(x)$:

$F(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = -2x+8$ et $v(x) = e^{0,5x}$

Donc $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 0,5e^{0,5x}$.

Donc $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$= -2e^{0,5x} + (-2x+8)\times 0,5\times e^{0,5x}$.

On met $e^{0,5x}$ en facteur :

$F'(x) = e^{0,5x}[-2 + 0,5(-2x+8)]$

$F'(x) = e^{0,5x}[-2 - x + 4] = (-x+2)e^{0,5x}$.

On constate que $F'(x) = f(x)$, ce qui prouve que *F* est une primitive de *f* sur ℝ.

Aide

Dire que *F* est une primitive de *f* sur ℝ signifie que *F* est dérivable sur ℝ et $F' = f$.

Attention !

Si $v(x) = e^{0,5x}$, $v'(x) = 0,5e^{0,5x}$.
Ne pas oublier le 0,5 !

b. On sait que).

Or $F(2) = (-2\times 2+8)e^{0,5\times 2} = 4e^1 = 4e$ et $F(0) = (-2\times 0 + 8)e^{0,5\times 0} = 8e^0 = 8$.

On en déduit que : $\int_0 f(x)dx = 4e - 8$.

À la calculatrice, on calcule $4^e - 8$ et on trouve ≈ 2,87 à 0,01 près.

Conseil

Contrôler ce résultat en calculant l'intégrale à la calculatrice.
Sur TI 83 Premium Connect :

```
∫₀²((-X+2)*e^(0.5*X))dX
                2.873127314
```

3. On peut faire appel à différents arguments.

Par exemple, on sait que

0) donc $G(2)$-$G(0)$ ≈ 2,87.

La courbe rouge ne peut donc pas représenter G

(pour cette courbe on aurait $G(2) - G(0) < 0,5$).

Le sens de variation de G est donné par le signe de sa dérivée f.

Or $f(x) = (-x+2)e^{0,5x}$ avec $e^{0,5x}$ qui est toujours strictement positif.

Aide

- Les trois courbes proposées correspondent à des fonctions qui ont des sens de variations différents.
Le plus simple est sans doute de s'appuyer sur le sens de variation de G qui est donné par le signe de sa dérivée f.
- Dans le cas où les courbes correspondent à des fonctions ayant le même sens de variation, il faut s'appuyer sur d'autres informations, comme des valeurs connues.

Donc la signe de $f(x)$ est celui de $(-x+2)$, fonction affine strictement décroissante qui s'annule en 2.

Donc $f(x) > 0$ pour $x < 2$ et $f(x) < 0$ pour $x > 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $-x+2$		+	0	-	
Signe de $f(x) = G'(x)$		+	0	-	
Variations de G		↗	$G(2)$	↘	

C'est donc la courbe en bleu qui peut, seule, correspondre à la fonction G.

Conseil

F étant déjà une primitive de f, on sait qu'il existe une constante réelle k telle que $G(x) = F(x) + k$ pour tout réel x (Propriété 1 page 150).
De ce fait les courbes représentatives de F et G ont la même allure, elles sont translatées l'une de l'autre vers le haut ou le bas du graphique. On peut donc tracer la courbe représentant F (ci-dessous) sur la calculatrice et contrôler que c'est bien la courbe en bleu qui en est une translatée :