Chapitre 4 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

f est définie sur [1 ; 26] par $f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. Pour tout $t \in [1\,;26]$, $f(t) = u(t)v(t) - 3t^2 + 10$ avec $u(t) = 24t$ et $v(t) = \ln(t)$. f est dérivable sur [1 ; 26].
Pour tout $t \in [1\,;26]$,

$$f'(t) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t) - 3 \times 2t.$$

Donc $f'(t) = 24 \times \ln(t) + 24t \times \frac{1}{t} - 6t = 24\ln(t) - 6t + 24$.

2. a. La fonction f' est dérivable sur [1 ; 26].
Pour tout $t \in [1\,;26]$,

$$f''(t) = 24 \times \frac{1}{t} - 6 = \frac{24}{t} - 6 = \frac{24t-6}{t} = \frac{6(4-t)}{t}.$$

Pour tout $t \in [1\,;26]$, $t > 0$ et $6 > 0$,
donc $f''(t)$ est du signe de $4 - t$, d'où :

x	1		4		26
Signe de $f''(t)$		+	0	−	
Variations de f'	18	↗	$f'(4)$	↘	$f'(26)$

avec $f'(4) = 24\ln(4) \approx 33{,}3$; $f'(26) = 24\ln 26 - 132 \approx$ -53,8.

Méthode
Pour justifier les variations de la fonction f', on calcule sa dérivée f'' et on étudie le signe de f''.

Pour étudier le signe de $f''(t)$, penser à réduire au même dénominateur.

b. Sur l'intervalle [1 ; 4], la fonction f' est strictement croissante, le minimum de f' est $f'(1) = 18$.
$18 > 0$ donc l'équation $f'(t) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle [1 ; 4].

Sur l'intervalle [4 ; 26], la fonction f' est continue et strictement décroissante.
0 est compris entre $f'(4) \approx 33{,}4$ et $f'(26) \approx -53{,}8$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [4 ; 26].

Méthode
On étudie les solutions de l'équation $f'(t) = 0$ sur chaque intervalle où la fonction f' est monotone, c'est-à-dire croissante ou décroissante.

Conclusion : l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 26] avec $4 < \alpha < 26$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :
$f'(14) \approx 3{,}3 (> 0)$ et $f'(15) \approx -1 \; (< 0)$ donc $14 < \alpha < 15$.

c. À l'aide du tableau des variations de f' et comme $f'(\alpha) = 0$, on en déduit que :

- $f'(t) > 0$ pour $t \in [1\,;\,\alpha[$
- $f'(t) < 0$ pour $t \in]\alpha\,;26]$.

On observe sur le tableau de variations de f', que :
- sur (1 ; 4], le minimum de f' est 18, nombre positif.
- sur [4 ; 26], f' est strictement décroissante avec $f'(\alpha) = 0$.

D'où le tableau de variations de *f* sur [1 ; 26] :

t	1		α		26
Signe de $f'(t)$		+	0	−	
Variations de f	7	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(26)$

Attention !
Dans la question 2.a, on a dressé le tableau de variations de ***f'*** et dans cette question, on a dressé le tableau de variations de ***f.***

3. a. D'après le tableau de variations de *f*, la fonction *f* est décroissante sur [α ; 26] avec $14 < \alpha < 15$, donc le nombre de malades a commencé à diminuer à partir de 15 semaines écoulées.

Le nombre de malades après *t* semaines est $f(t)$: on utilise le tableau de variations de *f* (question 2. c)

b. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de *t* semaines.
• Sur l'intervalle [4 ; α], *f* est croissante et f' est décroissante (*f* est concave) donc **la croissance de *f* est ralentie.**
• Sur [α ; 26], *f* est décroissante et f' est décroissante (*f* est concave) donc **la décroissance de *f* est accélérée**.
Comme $14 < \alpha < 15$,
entre 4 et 14 semaines écoulées, la croissance du nombre de malades est ralentie ;
entre 15 et 26 semaines écoulées, la décroissance du nombre de malades est accélérée.

Pour interpréter le résultat : « Sur [4 ; 26], f' est décroissante », on tient compte à la fois des variations de f et de celles de f'.