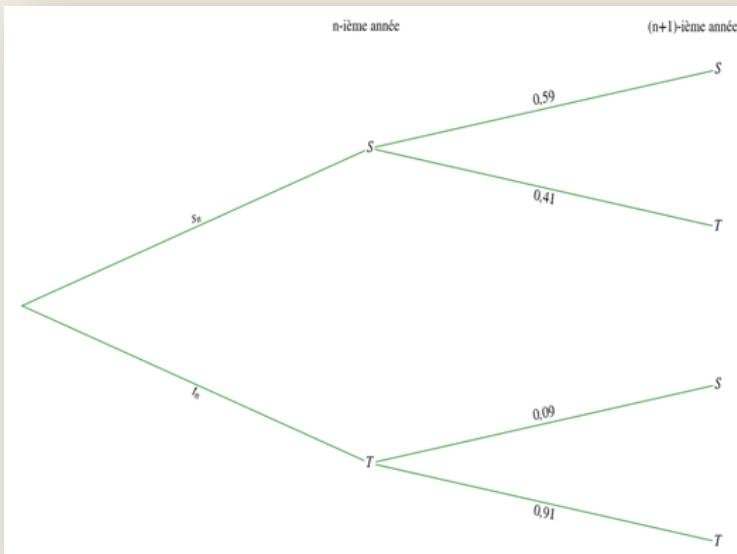


Chapitre 11 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

1. L'arbre pondéré décrivant la situation est le suivant :

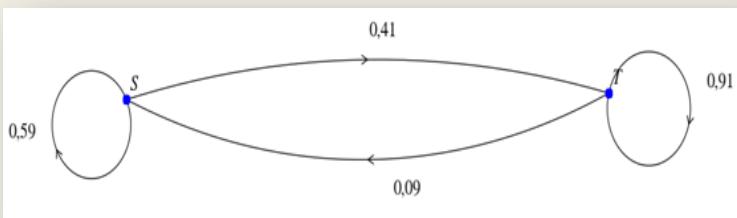


Attention !

Sur la première partie de l'arbre, on se place à la $n^{\text{ème}}$ année ; les probabilités sont donc s_n et t_n . Les probabilités conditionnelles figurant dans l'énoncé n'apparaissent que sur la deuxième partie de l'arbre (passage de la $n^{\text{ème}}$ à la $(n+1)^{\text{ème}}$ année).

On peut alors en déduire que : **B3=0,59*B2+0,09*C2** et **C3=1-B3**.

2. Le graphe pondéré associé au problème est le suivant :



Remarque

Pour une matrice de transition, la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

La matrice de transition M est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

3. Puisqu'initialement on a $P_0 = (0,35 \quad 0,65)$, on peut écrire :

$$P_3 = P_0 \times M^3.$$

Grâce à la calculatrice, $P_3 \approx (0,201 \quad 0,799)$.

Cela signifie que lors de la 3^{ème} année d'étude, la probabilité qu'un client des deux opérateurs, choisi au hasard soit client de l'opérateur S est égale environ à 0,201 ; de même la probabilité de choisir un client de l'opérateur T est égale environ à 0,799.

4. Afin de connaître une évolution sur le long terme, il est nécessaire de rechercher l'état stable.

Soit P la matrice de l'état stable, où $P = (a \quad b)$, avec $a + b = 1$.

P vérifie l'égalité $P \times M = P$,

ce qui donne le système $\begin{cases} 0,59a + 0,09b = a \\ 0,41a + 0,91b = b \end{cases}$

Remarque

Dans ce type de système, il faut toujours ne conserver qu'une seule des deux lignes et faire intervenir la condition $a + b = 1$.

On conserve la première équation en la réduisant et on reprend la condition $a + b = 1$.

On obtient : $\begin{cases} 0,41a - 0,09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

Par substitution grâce à l'égalité $b = 1 - a$, on obtient :

$$\begin{cases} 0,41a - 0,09(1 - a) = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5a = 0,09 \\ b = 1 - a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,09}{0,5} = 0,18 \\ b = 1 - 0,18 = 0,82 \end{cases}$$

On obtient $P = (0,18 \quad 0,82)$.

Puisque $0,82 < 0,83$, l'objectif ne sera pas atteint pour l'opérateur T.