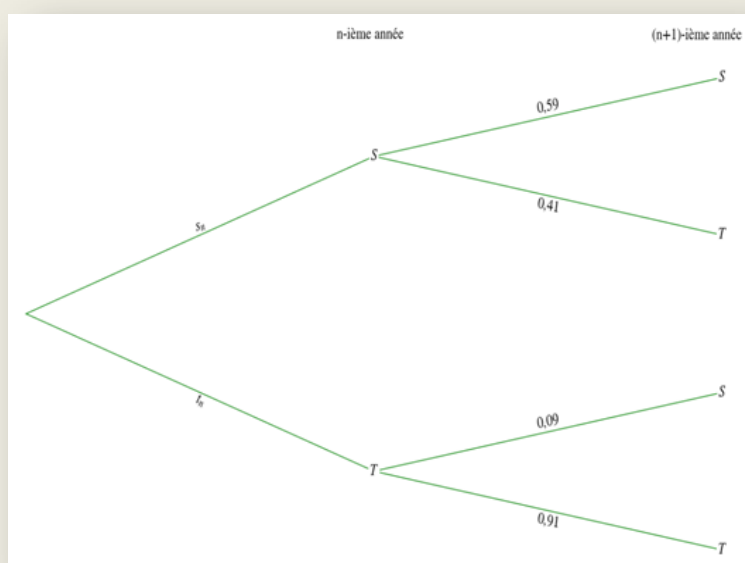


## Chapitre 11 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

1. L'arbre pondéré décrivant la situation est le suivant :



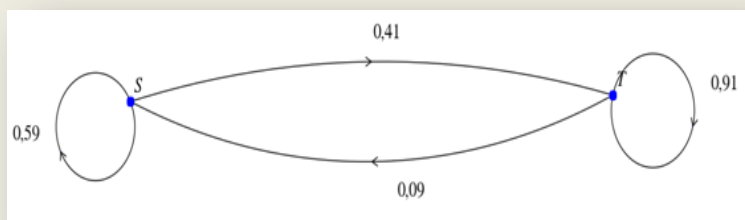
### Attention !

Sur la première partie de l'arbre, on se place à la  $n^{\text{ème}}$  année ; les probabilités sont donc  $s_n$  et  $t_n$ .

Les probabilités conditionnelles figurant dans l'énoncé n'apparaissent que sur la deuxième partie de l'arbre (passage de la  $n^{\text{ème}}$  à la  $(n+1)^{\text{ème}}$  année).

On peut alors en déduire que :  $B3=0,59*B2+0,09*C2$  et  $C3=1-B3$ .

2. Le graphe pondéré associé au problème est le suivant :



### Remarque

Pour une matrice de transition, la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

La matrice de transition  $M$  est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

3. Puisqu'initialement on a  $P_0 = (0,35 \quad 0,65)$ , on peut écrire :

$$P_3 = P_0 \times M^3.$$

Grâce à la calculatrice,  $P_3 \approx (0,201 \quad 0,799)$ .

Cela signifie que lors de la 3<sup>ème</sup> année d'étude, la probabilité qu'un client des deux opérateurs, choisi au hasard soit client de l'opérateur S est égale environ à 0,201 ;  
de même la probabilité de choisir un client de l'opérateur T est égale environ à 0,799.

4. Afin de connaître une évolution sur le long terme, il est nécessaire de rechercher l'état stable.

Soit  $P$  la matrice de l'état stable,  
où  $P = (a \quad b)$ , avec  $a + b = 1$ .

$P$  vérifie l'égalité  $P \times M = P$ ,

ce qui donne le système 
$$\begin{cases} 0,59a + 0,09b = a \\ 0,41a + 0,91b = b \end{cases}$$

On conserve la première équation en la réduisant et on reprend la condition  $a + b = 1$ .

On obtient : 
$$\begin{cases} 0,41a - 0,09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Par substitution grâce à l'égalité  $b = 1 - a$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0,41a - 0,09(1 - a) = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5a = 0,09 \\ b = 1 - a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,09}{0,5} = 0,18 \\ b = 1 - 0,18 = 0,82 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient  $P = (0,18 \quad 0,82)$ .

Puisque  $0,82 < 0,83$ , l'objectif ne sera pas atteint pour l'opérateur T.

#### Remarque

Dans ce type de système, il faut toujours ne conserver qu'une seule des deux lignes et faire intervenir la condition  $a + b = 1$ .