Exercice 98

1. a. Comparaison pour un prix de 4 €
On lit graphiquement que pour un repas à 4 €, l'offre est de 15 000 repas, la demande est de 25 000 repas.
La demande est supérieure à l'offre ; on doit pouvoir vendre tout ce qui sera produit.

1. b. Comparaison pour un prix de 8 €
L'offre est de 25 000 repas, la demande n'est plus que de 5 000 repas. L'offre est très supérieure à la demande. On pourra produire 10 000 repas de plus que pour un prix de 4 € mais on ne pourra pas tous les vendre.

2. a. Graphiquement le prix d'équilibre correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes représentées : 5 €.

2. b. Graphiquement l'offre est supérieure à la demande pour un prix supérieur à 5 € et inférieur ou égal à 8 €.

3. a. $f(x) - g(x) = -\frac{75}{x} + 35 - (-5x + 45)$
d'où $f(x) - g(x) = -\frac{75}{x} + 35 + 5x - 45$
soit $f(x) - g(x) = -\frac{75}{x} + 5x - 10$.
En réduisant au même dénominateur :
$f(x) - g(x) = \frac{-75+x(5x-10)}{x}$
$f(x) - g(x) = \frac{-75+5x^2-10x}{x}$
$f(x) - g(x) = \frac{5x^2-10x-75}{x}$

Développons $5(x-5)(x+3)$:
$5(x-5)(x+3) = 5(x^2 - 5x + 3x - 15)$
$5(x-5)(x+3) = 5(x^2 - 2x - 15)$
$5(x-5)(x+3) = 5x^2 - 10x - 75$

Des deux résultats en bleu, on déduit que pour tout x de [4 ; 8],
$f(x) - g(x) = \frac{5(x-5)(x+3)}{x}$.

Conseil
Quand on soustrait une expression à une autre, il faut être vigilant car il est bien souvent nécessaire d'ajouter des parenthèses !

Méthode
Pour démontrer que deux expressions sont « égales pour tout x » il y a plusieurs méthodes (voir exercice résolu 2 page 85).
Comme il est plus simple bien souvent de développer que de factoriser, on a choisi ici de développer les numérateurs de f(x) − g(x) d'une part et de $\frac{5(x-5)(x+3)}{x}$ d'autre part pour montrer qu'ils sont égaux à une même expression.

3. b. Cherchons par le calcul quand l'offre est supérieure à la demande, c'est-à-dire quand $f(x) \geq g(x)$ avec $x \in [4\,;8]$.
$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$
$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \frac{5(x-5)(x+3)}{x} \geq 0$
Il s'agit donc d'étudier le signe de $\frac{5(x-5)(x+3)}{x}$ ou encore de $\frac{(x-5)(x+3)}{x}$ puisque 5 est positif.

Méthode
Pour résoudre $f(x) \geq g(x)$ on se ramène à $f(x) - g(x) \geq 0$ pour être ramené à une étude de signes.
On met alors le premier membre sous forme d'un produit ou d'un quotient pour pouvoir étudier son signe.

<u>1re méthode</u>

On étudie de façon générale le signe de $\frac{(x-5)(x+3)}{x}$:

x	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-5)(x+3)}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Sachant que x appartient à [4 ; 8], on a $\frac{(x-5)(x+3)}{x} \geq 0$ pur $x \geq 5$ c'est-à-dire pour x appartenant à [5 ; 8].
L'offre est supérieure à la demande pour un prix supérieur à 5 € et inférieur ou égal à 8 €.

➘ Conseil
On vérifie que l'on retrouve bien la même solution que celle obtenue par lecture graphique à la question 2.b.

<u>2nde méthode</u>
On tient compte du fait que x appartient à l'intervalle [4 ; 8].
On a alors :
• x strictement positif
• $x+3$ par conséquent lui aussi strictement positif
Donc finalement sur [4 ; 8], $\frac{(x-5)(x+3)}{x}$ a même signe que $(x-5)$.

Comme $x-5>0 \iff x>5$, on en déduit finalement que $f(x)-g(x)>0$
si et seulement si $x>5$ avec $x \in [4\ ;\ 8]$.

Autrement dit l'offre est supérieure à la demande pour un prix supérieur à 5 € et inférieur ou égal à 8 €.