Exercice 96

1. Résoudre $f(x) = 0$.

On factorise :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x-5) = 0$$

On applique la « propriété du produit nul » :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0$$

Par conséquent :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}.$$

Les solutions sont 0 et $\frac{5}{2}$.

Méthode

Cette équation n'est pas une équation du premier degré.
On applique donc la méthode utilisée dans l'exercice résolu 4 page 87 :
– rassembler les termes dans le premier membre pour que le second membre soit nul (inutile ici, c'est déjà le cas !)
– factoriser le premier membre pour pouvoir appliquer la « propriété du produit nul » : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

2. La fonction f est une fonction polynôme de degré 2 car $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = -5, c = 0$.
Comme $a > 0$, f est d'abord strictement décroissante puis strictement croissante.

Méthode

On peut revoir l'exercice résolu 6 page 113.

Déterminons son extremum :
La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses aux points $A(0\,;0)$ et $B\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$ d'après la question 1.
La courbe admet (en repère orthogonal) un axe de symétrie qui a donc pour équation $x = \frac{\left(0+\frac{5}{2}\right)}{2} = \frac{5}{4}$.
Donc f admet son extremum en $x = \frac{5}{4}$.

Calculons $f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{4}$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \times \frac{25}{16} - \frac{25}{4} = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} = -\frac{25}{8}$$

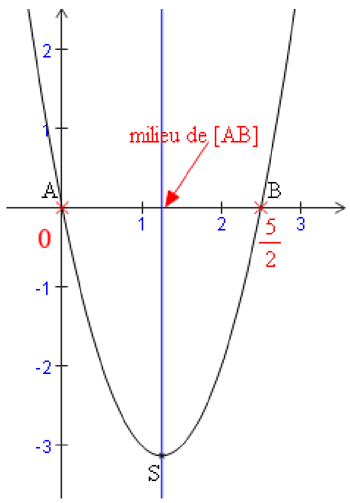
Donc f admet pour extremum $-\frac{25}{8}$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{25}{8}$	↗

Conseils

• On peut s'aider de ce dessin, fait à main levée ou dans la tête. . .



• Vérifier ces résultats en représentant graphiquement f sur la calculatrice et en utilisant l'outil *Trace*.

3. Indiquons les valeurs qui annulent f dans le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		0	$-\frac{25}{8}$	0	

Du sens de variation de f, on en déduit que :

$$f(x) > 0 \iff x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est donc :

$$]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\frac{5}{2}\,;\,+\infty[.$$

Conseil
Vérifier ce résultat graphiquement à la calculatrice.