Exercice 95

a. Résoudre l'inéquation $\mathbf{2(3x-5)+4 \leq -2x}$.

C'est une inéquation du premier degré.
Elle équivaut successive ment à

$6x - 10 + 4 \leq -2x$ *on a développé*

$6x - 6 \leq -2x$ *on a réduit*

$6x - 6 + 2x \leq -2x + 2x$ *on a ajouté 2x à chaque membre*

soit $8x - 6 \leq 0$

$8x - 6 + 6 \leq 0 + 6$ *on ajoute 6 à chaque membre*

soit $8x \leq 6$

$x \leq \frac{6}{8}$ *on divise par 6, positif sans changer le sens de l'inégalité*

soit $x \leq \frac{3}{4}$

L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\frac{3}{4}]$

↘ Méthode
Pour résoudre une inéquation du premier degré d'inconnue x,
on rassemble les termes en x dans un membre et les autres dans l'autre.

b. Résoudre l'inéquation $\boldsymbol{x^2 < 3x}$

Ce n'est pas une inéquation du premier degré.
On rassemble tous les termes dans le premier membre :
$x^2 < 3x$ équivaut à $x^2 - 3x < 0$.
Il s'agit donc d'étudie le signe de $x^2 - 3x$.
Pour mener cette étude de signe, on factorise l'expression :
$x^2 - 3x = x(x-3)$.
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $x(x-3) < 0$ si et seulement si x appartient à $]0\,;3[$.
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]0\,;3[$.

↘ Méthode
Pour résoudre une inéquation qui n'est pas du premier degré,
1) on rassemble tous les termes dans un même membre
2) on doit alors comparer une expression avec 0 c'est-à-dire à étudier son signe. Pour cela on la met sous forme de produit ou de quotient

c. Résoudre l'inéquation $\boldsymbol{\frac{6}{x+1} < 2}$.

Ce n'est pas une inéquation du premier degré.
On rassemble tous les termes dans le premier membre :
$\frac{6}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{6}{x+1} - 2 < 0$.
Il s'agit donc d'étudie le signe de $\frac{6}{x+1} - 2$.
Pour mener cette étude de signe, on écrit l'expression sous forme d'un quotient :
$\frac{6}{x+1} - 2 = \frac{6}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x+1} = \frac{6-2(x+1)}{x+1} = \frac{6-2x-2}{x+1} = \frac{-2x+4}{x+1}$.
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{-2x+4}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

↘ Attention
On ne peut pas transformer l'inéquation en $6 < 2(x+1)$ car pour multiplier chaque membre par $x+1$ il faudrait savoir le signe de $x+1$ pour changer ou non le sens de l'inégalité. C'est donc impossible car selon les valeurs de x, $x+1$ est positif ou négatif !

On lit sur le tableau que $\frac{-2x+4}{x+1} < 0$ si et seulement si
x appartient à $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]2\ ;\ +\infty[$.
L'ensemble des solutions est $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]2\ ;+\infty[$.