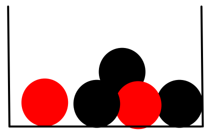
Exercice 63 Résolution détaillée

Question 1.a

L'expérience aléatoire E_1 « on tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne » s'interprète comme trois répétitions d'une même épreuve e : « on tire au hasard une boule de l'urne ».



Cette épreuve e admet deux issues :
- le succès S « obtenir une boule rouge »
- l'échec $\bar{S}$ « obtenir une boule noire ».

Le tirage d'une boule dans l'urne se faisant « au hasard », le modèle d'équiprobabilité donne :
$P(S) = \frac{2}{5}$ et $P(\bar{S}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.
L'épreuve e est donc une épreuve de Bernoulli et l'expérience E_1 est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{5}$.
La variable aléatoire X qui compte les succès suit alors la loi binomiale $B(n ; p)$.

Conseil

La double justification que :
- l'expérience aléatoire se modélise par un schéma de Bernoulli
- la variable aléatoire X suit une loi binomiale

s'apparente à une question de cours.
Il importe de bien argumenter et d'en soigner la rédaction.

Question 1.b

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(3 ; \frac{2}{5})$.

La propriété 3 du cours donne :
- son espérance est $E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$.
- sa variance est $V(X) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{25} = 0{,}72$.
- son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{\frac{18}{25}} \approx 0{,}85$.

Méthode

Lorsqu'une variable X suit la loi binomiale $B(n ; p)$, son espérance, sa variance et son écart-type s'expriment simplement en fonction de n et p :
- $E(X) = n\ p$
- $V(X) = n\ p\ (1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{n\ p\ (1-p)}$

Question 2.a

L'expérience aléatoire E_2 : « on tire au hasard, simultanément, 3 boules de l'urne » ne peut s'apparenter à 3 répétitions du même tirage au hasard d'une boule de cette urne.
E_2 ne peut donc pas se modéliser par un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire Y, qui indique le nombre de boules rouges obtenues, ne suit pas une loi binomiale.

Remarque
Même s'il était mentionné dans l'énoncé que les trois tirages s'effectuent « successivement mais sans remise », l'attitude à adopter serait la même que dans le cas présent des trois tirages simultanés.

Question 2.b

Lorsqu'on tire simultanément trois boules de l'urne, le nombre de boules rouges obtenues peut être 0, 1 ou 2.
La variable aléatoire Y prend donc les valeurs 0, 1 et 2.
L'énoncé mentionne que l'on a : $P(Y = 0) = 0,1$ et $P(Y = 1) = 0,6$.
Comme la somme $P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$ doit être égale à 1, on en déduit :
$P(Y=2) = 1 - 0,1 - 0,6 = 0,3$.
Il en résulte le tableau suivant donnant la loi de probabilité de Y.

k	0	1	2
$p_k = P(Y = k)$	0,1	0,6	0,3

Question 2.c

• $E(Y) = \sum_{k=0}^{2} k\, p_k = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,6 + 2 \times 0,3 = 1,2$.

• $V(Y) = \sum_{k=0}^{2} (k - 1,2)^2 p_k$
$= (0 - 1,2)^2 \times 0,1 + (1 - 1,2)^2 \times 0,6 + (2 - 1,2)^2 \times 0,3$
$= 0,36$.

• $\sigma(Y) = \sqrt{0,36} = 0,6$.

Méthode

Lorsqu'une variable suit une loi de probabilité autre que binomiale, on détermine son espérance, sa variance et son écart-type à l'aide des expressions qui les définissent dans le cas général (Définition 2 page 218).

Question 3.a

Que les tirages des trois boules s'effectuent successivement et avec remise ou simultanément, la règle du jeu est la même :
Une boule rouge fait gagner 3 € et une boule noire fait perdre 2 €.

Dans l'expérience E_1, lors d'un tirage successif et avec remise de trois boules :
- la variable aléatoire X indique le nombre de boules rouges obtenues ; le nombre de boules noires obtenues est alors donné par la variable aléatoire $3 - X$.
- la variable aléatoire G_1 qui fournit le gain algébrique du joueur s'exprime ainsi en fonction de la variable aléatoire X : $G_1 = 3X - 2(3 - X)$, soit $\boldsymbol{G_1 = 5X - 6}$.

Dans l'expérience E_2, lors d'un tirage simultané de trois boules :
On peut écrire de la même façon : $G_2 = 3Y - 2(3 - Y)$, soit $\boldsymbol{G_2 = 5Y - 6}$.

Question 3.b

En appliquant les propriétés du cours, on peut calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de G_1 à partir de celle (ou celui) de X :

• $E(G_1) = E(5\,X - 6) = 5\,E(X) - 6$
Comme $E(X) = 1{,}2$, on en déduit : $E(G_1) = 0$.

• $V(G_1) = V(5\,X - 6) = V(5\,X) = 25\,V(X)$
Comme $V(X) = 0{,}72$, on en déduit : $V(G_1) = 18$.

• $\sigma(G_1) = \sqrt{V(G_1)} = \sqrt{25\,V(X)} = 5\,\sigma(X)$
Comme $\sigma(X) \approx 0{,}85$, on en déduit : $V(G_1) \approx 4{,}25$.

Méthode

Lorsque deux variables aléatoires X et Z sont liées par une relation de la forme $Y = a\,X + b$, on peut utiliser la Propriété 1 page 218 pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y à partir de celle (ou celui) de X.

On obtient de même l'espérance, la variance et l'écart-type de G_2 à partir de celle (ou celui) de Y :

• $E(G_2) = E(5\,Y - 6) = 5\,E(Y) - 6$. Comme $E(Y) = 1{,}2$, on en déduit : $E(G_2) = 0$.

• $V(G_2) = V(5\,Y - 6) = V(5\,Y) = 25\,V(Y)$. Comme $V(Y) = 0{,}36$, on en déduit : $V(G_2) = 9$.

• $\sigma(G_2) = \sqrt{V(G_2)} = \sqrt{25\,V(Y)} = 5\,\sigma(Y)$. Comme $\sigma(Y) = 0{,}6$, on en déduit : $V(G_2) = 3$.

Question 3.c

En comparant les espérances :
On remarque d'une part que $E(G_1) = E(G_2)$ et d'autre part que ce gain algébrique est nul.

Cela permet de dire :
- que le gain algébrique que l'on peut espérer obtenir lors d'une partie est le même dans les deux jeux ;
- que ce gain est nul et donc que chacun des deux jeux est équitable pour le joueur.

En comparant les variances et les écart-types :
On remarque que $V(G_1) = 2\,V(G_2)$ et donc que $\sigma(G_1) = \sqrt{2}\,\sigma(G_1)$.

Cela permet de dire que la dispersion des gains autour de leur moyenne est beaucoup plus forte dans le jeu 1 que dans le jeu 2 et donc que le jeu 1 est plus risqué pour le joueur que le jeu 2.