Exercice 62 Résolution détaillée

Monsieur C, commercial doit visiter 10 clients dans une journée, de façon indépendante.
Lors d'une visite, la probabilité de rencontrer effectivement le client est égale à 0,8.
Soit X le nombre de clients effectivement rencontrés.

Question A.1

L'expérience aléatoire décrite consiste à répéter 10 fois la même épreuve e : « Monsieur C. rend visite à un client ».
Cette épreuve e comporte deux issues : « la rencontre a lieu » que l'on peut prendre comme succès S, de probabilité 0,8 et « la rencontre n'a pas lieu » qui est l'échec de probabilité 0,2.
Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}8$.
L'expérience aléatoire qui répète cette épreuve 10 fois, de façon indépendante, se modélise donc par un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}8$.
La variable aléatoire X, qui compte les clients effectivement rencontrés (X compte les succès), suit donc la loi binomiale B (10 ; 0,8).

Conseil

Lorsque la loi de probabilité d'une variable aléatoire X s'avère être une loi binomiale, il est inutile de préciser les valeurs prises par X, ni les probabilités qui leur sont associées.
C'est la justification que le contexte s'apparente bien à un schéma de Bernoulli et que X en compte les succès qu'il convient de soigner.

Question A.2

Le nombre de clients que Monsieur C. peut espérer rencontrer au cours de sa journée est donnée par l'espérance E(X).
X suivant la loi B(10 ; 0,8), on a, par propriété, E(X) = 10×0,8 = 8.

Monsieur C. peut donc s'attendre, lors d'une journée où 10 visites sont prévues, à rencontrer effectivement 8 clients.

Méthode

Au cours de la réalisation d'un schéma de Bernoulli en n répétitions, le nombre de succès S que l'on peut espérer obtenir correspond à la moyenne du nombre de succès que l'on obtiendrait lors d'un grand nombre de réalisations de ce schéma de Bernoulli.
Ce nombre est donc fourni par l'espérance de la variable aléatoire X, soit $E(X) = np$.

Question A.3.a

Il s'agit de calculer P(X≥1), qui est la somme des P(X=k) pour k variant de 1 à 10.

Mais l'événement contraire de (X≥1) est l'événement (X=0), qui n'est réalisé que dans un seul cas : lorsqu'aucun « succès » n'est obtenu lors des 10 visites.

Il parait donc avantageux de calculer P(X≥1) à l'aide de la relation : P(X≥1) = 1 – P(X=0).

L'événement (X=0) correspond à la seule liste de résultats : $\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$, dont la probabilité, par la loi produit, est égale à : P(X=0) = $[P(\bar{S})]^{10} = 0{,}2^{10} = 1{,}024 \times 10^{-7}$.

A 10^{-3} près, la probabilité P(X=0) est donc nulle et il en résulte que P(X≥1) = 1.

En conclusion, la probabilité que Monsieur C. rencontre au moins un client lors d(une journée est égale à 1, à 10^{-3} près.

Question A.3.b

Il s'agit de calculer P(X≥5), qui est la somme des P(X=*k*) pour *k* variant de 5 à 10.

La variable aléatoire suivant la loi B(10 ;0,8), on sait que la loi de probabilité de X est donnée par : $P(X=k) = \binom{10}{k}\,0{,}8^{k}\ 0{,}2^{10-k}$, pour chaque entier *k* compris entre 0 et 10.

Il en résulte que la valeur exacte de P(X≥5) s'écrit $\sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k}\,0{,}8^{k}\,0{,}2^{10-k}$.

Conseil

Lorsque X suit la loi B(*n* ;*p*), il faut être capable :
- de donner l'expression de P(X=*k*) pour *k* entier, entre 0 et *n*.
- d'obtenir une valeur approchée de $P(X=k)$ et de $P(X \leq k)$ à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Une valeur approchée à 10^{-3} près de P(X≥5) peut alors s'obtenir à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

B9 =SOMME(B2:B7)

	A	B	C	D	E
1	k	P(X=k)			
2	5	0,02642412	=LOI.BINOMIALE(A2;10;0,8;0)		
3	6	0,08808038			
4	7	0,20132659			
5	8	0,30198989			
6	9	0,26843546			
7	10	0,10737418			
8					
9	somme	0,99363062			

En conclusion, **à 10^{-3} près, P(X≥5) ≈ 0,994.**

Une autre démarche pour le calcul de $P(X \geq 5)$ consiste à écrire :
$P(X \geq 5) = 1 - P(X<5) = 1 - P(X \leq 4)$.

Une calculatrice ou un logiciel fournissant directement $P(X \leq 4)$, le calcul de $P(X \geq 5)$ s'en trouve facilité :

P(X ≤ 4)	0,00636938
P(X ≥ 5)	0,99363062

=LOI.BINOMIALE(4;10;0,8;1)

Conseil

Pour calculer une valeur approchée de $P(X \geq k)$ lorsque X suit la loi $B(n\ ;p)$, avec une calculatrice ou un logiciel, il peut être avantageux d'utiliser la relation $P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$.

En effet, $P(X<k)$ qui coïncide avec $P(X \leq k-1)$ s'obtient en général directement sur une calculatrice ou un logiciel (voir Exercice résolu 6).

Question B.1

Sous l'hypothèse *(H)* : « $p = 0,8$ », un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence f de rencontres réussies lors des 10 visites est l'intervalle $[\frac{a}{10}\ ; \frac{b}{10}]$ où a et b sont les plus petits entiers tels que :

$P(X \leq a) > 0,025$ et $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Conseil

Pour comprendre la signification de l'intervalle I de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence f du succès, fourni par la loi binomiale, il importe de bien connaitre sa définition (voir Définition 6 page 250) et son illustration sur un axe.

Pour déterminer cet intervalle I, on peut se reporter à la détermination pratique de a et b qui figure en bas de la page 250

Une calculatrice ou un tableur fournit :
$a = 5$ et $b = 10$.

	A	B
1	k	P(X ≤ k)
2	0	1,024E-07
3	1	4,1984E-06
4	2	7,7926E-05
5	3	0,00086436
6	4	0,00636938
7	5	0,0327935
8	6	0,12087388
9	7	0,32220047
10	8	0,62419036
11	9	0,89262582
12	10	1

Il en résulte que l'intervalle de fluctuation cherché est $I = [\frac{5}{10}\ ; \frac{10}{10}] = [0,5\ ; 1]$.

Question B.2

Lors d'une journée donnée, Monsieur C. rencontre effectivement 6 clients sur les 10 prévus ; il en résulte une fréquence observée du succès f égale à 0,6.

On se demande si ce résultat peut permettre une remise en question de l'hypothèse *(H)* selon laquelle la probabilité qu'une visite conduise à une rencontre avec le client est $p = 0{,}8$.

D'après la question précédente, l'intervalle de fluctuation de la fréquence du succès fournie par la loi binomiale est I = [0,5 ; 1].

On constate que $f = 0{,}6$ appartient à I, ce qui amène à considérer que l'écart entre $p = 0{,}8$ et $f = 0{,}6$ n'est pas significatif.

La fréquence observée $f = 0{,}6$ ne permet donc pas de remettre en question l'hypothèse (H) : « p = 0,8 ».

Méthode

Dans une situation pouvant se modéliser par un schéma de Bernoulli, on fait l'hypothèse *(H)* que le succès S a pour probabilité *p.*
La variable aléatoire X qui compte les succès suit alors la loi B(n ; p) et F = $\frac{X}{n}$ donne la fréquence du succès S.

Une fois que l'on a déterminé l'intervalle I de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence du succès et que l'on a recueilli la fréquence f du succès fourni par un échantillon de taille n,
on peut prendre une décision au seuil de 95% selon que f appartient ou non à l'intervalle I :
- si f n'est pas dans I, on rejette l'hypothèse *(H)* au risque d'erreur de 5%
- si f est dans I, on ne rejette pas l'hypothèse *(H)*.