Exercice 61 Résolution détaillée

Question 1.a

$\binom{12}{1}$ est, dans l'arbre qui illustre un schéma de 12 épreuves de Bernoulli, le nombre de chemins qui réalisent exactement 1 succès S, et donc 11 échecs $\bar{S}$.

Conseil
Il faut avoir présent à l'esprit la définition 4 du cours qui donne du sens au nombre $\binom{n}{k}$.

Choix de la méthode
La valeur de n, égale à 12, ne permet pas d'envisager la représentation du schéma de Bernoulli correspondant à n =12 par un arbre.
Mais la valeur de k étant égale à 1, il est possible d'écrire seulement les chemins de l'arbre qu'il faut dénombrer, sous forme de listes de 12 symboles S ou $\bar{S}$, comprenant 1 S et donc 11 $\bar{S}$.

Réalisation
Les listes s'écrivent :
$S\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$; $\bar{S}S\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$; ...

Sans même les écrire toutes, on comprend qu'il existe autant de listes comportant un seul S que de places possibles dans une liste pour y caser l'unique S.
Il y a 12 places possibles et donc 12 listes satisfaisant le critère « 1 S parmi 12 ».

On en déduit : $\binom{12}{1}$ = 12.

Méthode
Pour trouver la valeur de $\binom{n}{k}$, plusieurs démarches sont possibles, selon les valeurs de n et de k :
- Lorsque n est suffisamment petit, on peut construire l'arbre illustrant un schéma de n épreuves de Bernoulli et dénombrer les chemins réalisant exactement k succès S ;
- Pour certaines valeurs particulières de k, telles que 0 et 1, on peut se contenter d'imaginer l'arbre et d'en écrire les chemins réalisant k succès S ;
- Pour des valeurs de n restant modestes, l'utilisation ou la reproduction du triangle de Pascal fournit le résultat ;
- Pour des valeurs de n plus grandes, l'outil « calculatrice » est le bienvenu.

Autres exemples :

■ $\binom{15}{0}$ est le nombre de chemins de longueur 15 réalisant 0 succès S.
Or, il n'y a qu'un seul chemin répondant à ce critère, c'est $\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$.
D'où $\binom{15}{0}$ = 1.

■ $\binom{15}{1}$ est le nombre de chemins de longueur 15 réalisant 1 seul succès S.
Il y a autant de chemins de ce type que de façons de positionner un unique succès S parmi les 15 symboles, soit 15 possibilités. D'où $\binom{15}{1}$ = 15.

Question 1.b

$\binom{6}{2}$ est – par définition – le nombre de chemins de l'arbre illustrant un schéma de 6 épreuves de Bernoulli, qui réalisent exactement 2 succès.

Lorsque $n = 6$, l'arbre comporte $2^6 = 64$ branches terminales ou encore 64 chemins, ce qui n'incite pas à le construire …

On peut, par contre facilement reproduire le Triangle de pascal jusqu'à $n = 6$ (voir page 246).

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	

Il reste alors à lire : $\boldsymbol{\binom{6}{2} = 15}$**.**

Remarque

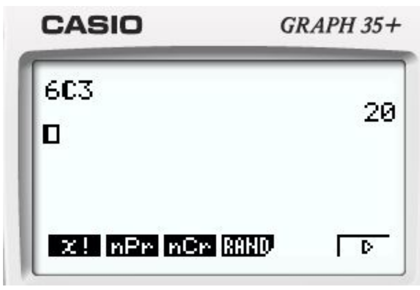
Pour savoir si la représentation d'un schéma de n épreuves de Bernoulli par un arbre peut être envisagée, il suffit de calculer combien de branches « terminales » (ou combien de chemins) comportera cet arbre.

On compte :
2 chemins lorsque $n = 1$
2×2 chemins lorsque $n = 2$
$2\times2\times2$ chemins lorsque $n = 3$
et plus généralement 2^n chemins pour n répétitions.

Question 1.c

Pour calculer $\binom{6}{3}$, on peut utiliser ce même triangle de Pascal qui donne à nouveau, par simple lecture : $\binom{6}{3} = 20$.

On peut aussi utiliser une calculatrice :



Conseil

Pour l'utilisation d'une calculatrice ou d'un logiciel, voir Exercice résolu 3.

Question 2.a

D'après la Propriété 3 du cours :
$\binom{12}{11} = \binom{12}{12-11} = \binom{12}{1}$.
$\binom{12}{1}$ ayant été précédemment calculé,
il en résulte : $\boldsymbol{\binom{12}{11} = 12}$**.**

Question 2.b

D'après la Propriété 4 du cours :
$\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.
D'après les résultats précédents, on obtient :
$\binom{7}{3} = 15 + 20$, soit $\boldsymbol{\binom{7}{3} = 35}$**.**

Question 2.c

D'après la Propriété 3 du cours :
$\binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2} = 15$.
On a donc $\boldsymbol{\binom{6}{4} = 15}$.

Conseil

Les propriétés 3 et 4 du cours doivent pouvoir être mobilisées spontanément dans les exercices.

Les démonstrations de ces propriétés sont nécessaires pour nous convaincre de la véracité de ces propriétés, mais elles ont un autre atout : elles leur donnent du sens.

Comprendre et savoir refaire ces démonstrations est la meilleure garantie pour les mémoriser et les utiliser à bon escient.