Exercice 60 Résolution détaillée

Indiquer pour chaque situation si la variable aléatoire *X* peut être associée ou non à une loi binomiale ; en préciser les paramètres *n* et *p* quand c'est le cas.

Situation1.
D'un sac contenant 26 jetons portant les lettres de l'alphabet, on tire au hasard simultanément 3 jetons.
X indique le nombre de voyelles obtenues.

Critère 1 (voir point méthode ci-contre) :
La situation décrite peut-elle s'interpréter comme trois répétitions du tirage d'un jeton dans le sac ?
La réponse est NON, car les trois jetons sont tirés simultanément et non successivement avec remise.

Le Critère 1 n'étant pas satisfait, la variable aléatoire X, qui pourtant « compte les voyelles obtenues », ne peut pas être associée à une loi binomiale.

Situation2.
Un enfant tape au hasard 4 fois sur l'une des dix touches d'un clavier numérique.
X indique le nombre de « 0 » obtenus.

Critère 1 :
Cette fois, la situation décrite consiste à répéter dans les mêmes conditions une même épreuve aléatoire E consistant à « taper au hasard sur l'une des 10 touches du clavier numérique ».
Et l'on peut considérer que cette épreuve comporte deux issues : le succès *S* « obtenir 0 » (issue mise en avant par l'énoncé) et l'échec $\bar{S}$ « ne pas obtenir 0 ».

Nous sommes donc bien en présence d'un schéma de Bernoulli dont les paramètres sont :
$n = 10$ et $p = P(S) = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Critère 2 :
Il reste à voir si la variable aléatoire X introduite dans l'énoncé joue bien le rôle de « compteur de succès ».
La réponse est OUI, car X indique le nombre de « 0 » obtenus lors des 10 frappes du clavier et « obtenir 0 » est bien le succès qui a été précédemment retenu lors de l'identification du schéma de Bernoulli.

En conclusion, la variable aléatoire X suit la loi binomiale B(10 ; 0,1).

Méthode

Pour établir si une variable aléatoire X suit ou non une loi binomiale, il faut étudier si les **deux** critères suivants sont satisfaits.
1. La situation se modélise par un schéma de Bernoulli, c'est-à-dire qu'elle consiste à répéter *n* fois une même expérience aléatoire admettant exactement deux issues :
- le succès *S* de probabilité *p*
- l'échec $\bar{S}$ de probabilité 1-*p*.
2. La variable aléatoire X est le « compteur des succès », c'est-à-dire qu'elle associe à chaque liste de *n* résultats $SS\bar{S}S \dots \bar{S}S$, le nombre de succès *S* obtenus.

Conseil

Il faut se garder de conclure hâtivement en se satisfaisant d'avoir reconnu dans la situation décrite un schéma de Bernoulli. Encore faut-il que la variable aléatoire X soit définie comme comptant les succès obtenus au cours des *n* répétitions.
On gardera à l'esprit que s'il n'y a pas de loi binomiale sans un contexte de schéma de Bernoulli, il existe des schémas de Bernoulli où la variable aléatoire associée ne suit pas une loi binomiale (voir exercice résolu 5).

Situation3.
Au 01/01/2015, 25 % de la population française est âgé d'au moins 60 ans.
On sélectionne 10 personnes au hasard.
X donne le nombre de personnes de 60 ans ou plus y figurant.

Le fait de choisir au hasard 10 personnes au hasard dans la population française détermine-t-il un schéma de Bernoulli ?

L'énoncé ne permet pas de considérer que l'on sélectionne au hasard le nom d'une personne dans la population et que l'on répète cette sélection 10 fois, lors de tirages indépendants les uns des autres.
En effet, si Zoé a été sélectionnée lors d'un tirage, peut-on penser qu'elle puisse l'être (ou l'avoir été) à nouveau lors d'un autre tirage ?
Non, bien sûr, ce sont - le plus vraisemblablement - 10 personnes qui ont été sélectionnées dans la population française, « sans remise », c'est-à-dire sans qu'une personne sélectionnée ne soit « remise en jeu ».
On pourrait donc conclure que cette situation n'est pas un schéma de Bernoulli et que, par conséquent, la loi de probabilité de la variable aléatoire X ne peut pas être une loi binomiale ...

NON, et pourtant !

Compte tenu de la remarque ci-contre, on peut ici aisément considérer que le nombre n =10 de personnes prélevées est très faible en regard de la population française (environ 66 millions).

La conséquence est que la situation décrite peut alors se modéliser par un schéma de Bernoulli dont les paramètres sont n = 10 et p = 0,25, en retenant comme succès S, l'événement : « la personne est âgée de plus de 60 ans ».

Dans ce modèle, la variable aléatoire X qui compte les succès obtenus lors des 10 tirages suit alors la loi binomiale B(10 ; 0,25).

Remarque

On sait depuis la classe de seconde et on reverra dans le paragraphe « Échantillonnage » de ce même chapitre 9 (page 250) que prélever un échantillon de taille n dans une population donnée consiste à effectuer n tirages indépendants, donc avec remise, d'un individu dans la population.
Il est toutefois admis que lorsque les n prélèvements ne s'effectuent pas « avec remise », on peut les assimiler à des prélèvements avec remise, lorsque le nombre n de prélèvements peut être estimé très faible en regard de l'effectif de la population.