

Exercice 45 Résolution détaillée

Lors de cinq parties à un jeu vidéo, Max a obtenu successivement : 155, 319, 457, 224 et 393 points.

Question

Quel score entier devrait-il obtenir lors d'une sixième partie pour que sa moyenne augmente et qu'il gagne en régularité avec un écart-type inférieur à 100 ?

Etape 0

Situation initiale

Une calculatrice ou un logiciel permet de calculer la moyenne et l'écart-type de la série initiale.

155	319	457	224	393
moyenne	m	309,6		
écart type	σ	109,5438		

Etape 1

Recherche de conditions nécessaires

Notons x le sixième score recherché.

- l'ajout de x à la série initiale devant avoir pour effet d'augmenter la moyenne de la série, il est nécessaire que x soit supérieur à la moyenne. Cette condition s'écrit : $x > 309,6$
- l'énoncé apporte une nouvelle condition sur x . C'est que le score x est entier.
- l'ajout de x à la série initiale devant avoir pour effet de rendre les scores de Max plus réguliers, plus homogènes, c'est-à-dire moins dispersés autour de leur moyenne, il est nécessaire que l'écart-type de la série des six scores ait un écart-type σ' plus petit que celui de la série initiale. Cette condition s'écrit : $\sigma' < \sigma$, c'est-à-dire $\sigma' < 109,5438$.
- l'énoncé apporte une nouvelle condition plus contraignante sur σ' . Elle s'écrit : $\sigma' < 100$.

On retient donc trois conditions nécessaires : x est entier ; $x > 309,6$; $\sigma' < 100$.

Méthode

Avant d'envisager l'ajout d'un sixième score, il paraît naturel de commencer par calculer la moyenne et l'écart-type des cinq scores initiaux.

Ensuite, la recherche du sixième score peut s'effectuer en deux étapes.

Etape 1 : Rechercher des critères que doivent nécessairement satisfaire ce sixième score pour avoir les effets voulus sur la série.

Etape 2 : Construire de tels « sixième score » selon ces critères et vérifier s'ils sont solution ou non du problème.

Etape 2

Recherche de candidats x et vérification

Les candidats peuvent être 310, 311, 312 ... sous réserve d'avoir $\sigma' < 100$.

Il reste à les tester :

155	319	457	224	393	310
moyenne	m'	309,6667			
écart type	σ'	99,99944			

155	319	457	224	393	311
moyenne	m'	309,8333			
écart type	σ'	100,0007			

155	319	457	224	393	312
moyenne	m'	310			
écart type	σ'	100,0033			

Bilan

- Les conditions de l'énoncé sont satisfaites si Max réalise un sixième score égal à 310, mais ne le sont pas lorsque son score est 311 ou 312.
- Suite à la remarque ci-contre, aucun des scores supérieurs à 310 ne peut convenir.

Conclusion

Max doit réaliser un sixième score égal à 310 pour que toutes les contraintes de l'énoncé soient satisfaites.

Remarque

si un candidat x ne convient pas, parce que conduisant à un écart-type supérieur à 100 (c'est déjà le cas de $x = 311$), il est inutile d'espérer trouver un candidat plus grand qui conviendrait.

En effet, plus x est grand, plus il s'éloigne de la moyenne m' de la série (car lorsque x entier augmente de 1, la moyenne m' augmente seulement de $1/6$ et l'écart entre x et m' se trouve donc augmenté).

L'écart-type σ' qui prend en compte les carrés des écarts des valeurs autour de leur moyenne augmente donc lorsque x augmente.

En conclusion, si 311 ne convient pas, il en est de même de 312 et des suivants.