Exercice 110 Résolution détaillée

1. D'après l'énoncé, $a_1 = 1600$ et b_1 =2000.
Le salaire augmente dans l'entreprise A de 150 euros chaque année donc

$$a_2 = 1600 + 150 = 1750$$
$$a_3 = 1750 + 150 = 1900.$$

Le salaire augmente dans l'entreprise B de 3% chaque année donc

$$b_2 = 2000 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 2000 \times 1{,}03 = 2060$$
$$b_3 = 2060 \times 1{,}03 = 2121{,}80.$$

Méthode

Augmenter une quantité de t% revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$

2.a. La différence entre les deux algorithmes réside dans l'affichage de a et b.
Dans l'algorithme 1, à chaque passage dans la boucle, les valeurs de a et b sont affichées alors que dans l'algorithme 2, seules les valeurs obtenues à la fin de al boucle Tant que… Fin Tant que sont affichées.
Si on veut donc obtenir directement les valeurs a_n et b_n pour une valeur de n= donnée, il faut choisir l'algorithme 2.

b. Pour $n = 3$, l'algorithme affiche les valeurs de a_3 et b_3 que nous avons obtenues précédemment donc 1900 et 2121,80.

Conseil

Pour augmenter de 3% un salaire de 2000 €, on peut aussi calculer 3% de 2000 soit $2000 \times \frac{3}{100} = 60$ et ajouter ces 60 € au 2000 €.
Mais multiplier directement par $1 + \frac{3}{100}$ permet de généraliser plus facilement et de se rendre compte que chaque terme de la suite (b_n) s'obtient en multipliant le précédent par 1,03.
La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison 1,03.

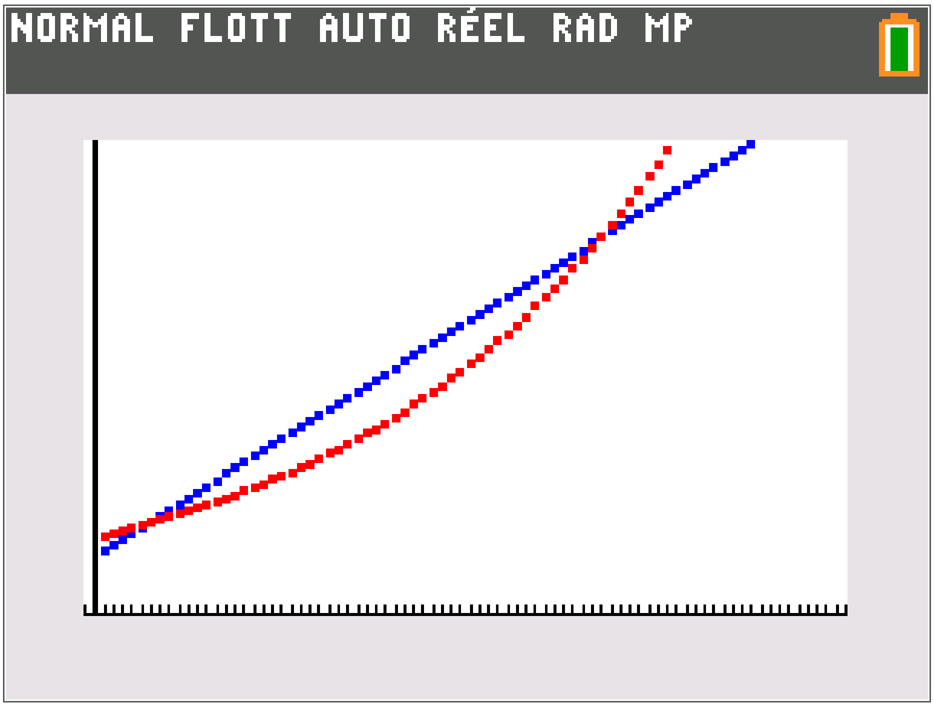
3.a. Pour tout $n \geq 1$, on a $a_{n+1} = a_n + 150$ donc la suite (a_n) est arithmétique de raison r =150.
Pour tout $n \geq 1$, on a $b_{n+1} = b_n \times 1{,}03$ donc la suite (b_n) est géométrique de raison q =1,03.

b. On en déduit que $a_n = a_1 + (n-1) \times r$ donc, pour tout $n \geq 1$,
$a_n = 1600 + (n-1) \times 150$ soit $a_b = 1450 + 150\, n$.
De même, pour tout $n \geq 1$, $b_n = b_1 \times q^{n-1}$ soit $b_n = 2000 \times 1{,}03^{n-1}$.

c. Ayant l'expression de a_n et b_n en fonction de n, on peut entrer les deux suites sur une calculatrice.

Avec le fenêtre graphique suivante :
nMin = 1, nMax = 80, -1 ≤ x ≤80, -1 ≤ y ≤ 12000,

on obtient le graphique ci-dessous.



À l’aide de l’outil Trace, on lit graphiquement que le salaire dans l’entreprise A est supérieur à celui dans l’entreprise B pour n compris environ entre 6 et 54.

On peut préciser ces valeurs grâce à la table de valeurs :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

n	$u(n)$	$v(n)$		
1	1600	2000		
2	1750	2060		
3	1900	2121.8		
4	2050	2185.5		
5	2200	2251		
6	2350	2318.5		
7	2500	2388.1		
8	2650	2459.7		
9	2800	2533.5		
10	2950	2609.5		
11	3100	2687.8		

$n=6$

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

n	$u(n)$	$v(n)$
50	8950	8512.4
51	9100	8767.8
52	9250	9030.8
53	9400	9301.8
54	9550	9580.8
55	9700	9868.2
56	9850	10164
57	10000	10469
58	10150	10783
59	10300	11107
60	10450	11440

$n=50$

On peut considérer que, à partir de la 6e année, Claude touchera un salaire plus élevé dans l'entreprise A. (on suppose qu'il ne travaillera pas 54 ans ou plus).

4. On peut utiliser un tableur pour calculer les sommes obtenues l'an n depuis l'embauche.
Par exemple, avec un tableur, on obtient que la somme des salaires perçues chez A dépasse celle perçue chez B pour $n \geq 11$ (on considère toujours $n < 54$).

	A	B	C	D	E	F
1	n	a_n	b_n	Somme chez A	Somme chez B	test
2	1	1600	2000	1600	2000	
3	2	1750	2060	3350	4060	
4	3	1900	2121,8	5250	6181,8	
5	4	2050	2185,454	7300	8367,254	
6	5	2200	2251,01762	9500	10618,27162	
7	6	2350	2318,54815	11850	12936,81977	
8	7	2500	2388,10459	14350	15324,92436	
9	8	2650	2459,74773	17000	17784,67209	
10	9	2800	2533,54016	19800	20318,21226	
11	10	2950	2609,54637	22750	22927,75862	
12	11	3100	2687,83276	25850	25615,59138	OK
13	12	3250	2768,46774	29100	28384,05912	OK
14	13	3400	2851,52177	32500	31235,5809	OK
15	14	3550	2937,06743	36050	34172,64832	OK
16	15	3700	3025,17945	39750	37197,82777	OK
17	16	3850	3115,93483	43600	40313,76261	OK
18	17	4000	3209,41288	47600	43523,17548	OK

On a obtenu cette feuille de calcul avec les formules suivantes :

	A	B	C	D	E	F
1	n	a_n	b_n	Somme chez A	Somme chez B	test
2	1	1600	2000	=SOMME($B$2:B2)	=SOMME($C$2:C2)	=SI(D2>E2; "OK";"")
3	=A2+1	=B2+150	=C2*1,03	=SOMME($B$2:B3)	=SOMME($C$2:C3)	=SI(D3>E3; "OK";"")
4	=A3+1	=B3+150	=C3*1,03	=SOMME($B$2:B4)	=SOMME($C$2:C4)	=SI(D4>E4; "OK";"")
5	=A4+1	=B4+150	=C4*1,03	=SOMME($B$2:B5)	=SOMME($C$2:C5)	=SI(D5>E5; "OK";"")
6	=A5+1	=B5+150	=C5*1,03	=SOMME($B$2:B6)	=SOMME($C$2:C6)	=SI(D6>E6; "OK";"")
7	=A6+1	=B6+150	=C6*1,03	=SOMME($B$2:B7)	=SOMME($C$2:C7)	=SI(D7>E7; "OK";"")
8	=A7+1	=B7+150	=C7*1,03	=SOMME($B$2:B8)	=SOMME($C$2:C8)	=SI(D8>E8; "OK";"")
9	=A8+1	=B8+150	=C8*1,03	=SOMME($B$2:B9)	=SOMME($C$2:C9)	=SI(D9>E9; "OK";"")
10	=A9+1	=B9+150	=C9*1,03	=SOMME($B$2:B10)	=SOMME($C$2:C10)	=SI(D10>E10; "OK";"")

Une autre piste serait d'exprimer ces deux sommes en fonction de n en utilisant les formules des propriétés 2 et 4 de ce chapitre, puis d'entrer les deux suites sur une calculatrice afin de les comparer (avec la même démarche qu'en question 3.c.)