Exercice 108 Résolution détaillée

1.a. En mg/L, on a les concentrations suivantes :
$c_1 = c_0 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) = 4 \times 0{,}7 = 2{,}8$
$c_2 = c_1 \times 0{,}7 = 1{,}96$
$c_3 = c_2 \times 0{,}7 = 1{,}372$

Méthode

Pour diminuer une quantité de t %, on la multiplie par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

b. Pour tout n de ℕ, on a $c_{n+1} = c_n \times 0{,}7$ donc la suite (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$.

c. Par la propriété 3 page 142, on a $c_n = c_0 \times q^n = 4 \times 0{,}7^n$.

d. 18 heures après l'injection, la concentration est, en mg/L, $c_{18} = 4 \times 0{,}7^{18} \approx 0{,}0065$.

2.a. La concentration à la $(n+1)$-ième heure s'obtient en diminuant celle de la n-ième heure de 30 % puis en ajoutant 1 mg/L.
D'où $k_{n+1} = 0{,}7k_n + 1$.

b. $d_{n+1} = k_{n+1} - \frac{10}{3} = 0{,}7k_n - \frac{10}{3} + 1 = 0{,}7k_n - \frac{7}{3}$.
Donc $d_{n+1} = 0{,}7\left(k_n - \frac{10}{3}\right) = 0{,}7d_n$.
La suite (d_n) est donc géométrique de raison 0,7.

Conseil

On pourra revoir l'exercice résolu 8 page 143.

c. Par la propriété 3 page 142, $d_n = d_0 \times 0{,}7^n$.
Or $d_0 = k_0 - \frac{10}{3} = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$.
Donc $d_n = \frac{2}{3} \times 0{,}7^n$.
De $d_n = k_n - \frac{10}{3}$ on déduit que $k_n = d_n + \frac{10}{3}$.
On a donc finalement $k_n = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}7^n$.
d. 18 heures après l'injection, la concentration, en mg/L, est $k_{18} = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}7^{18} \approx 3{,}33$.