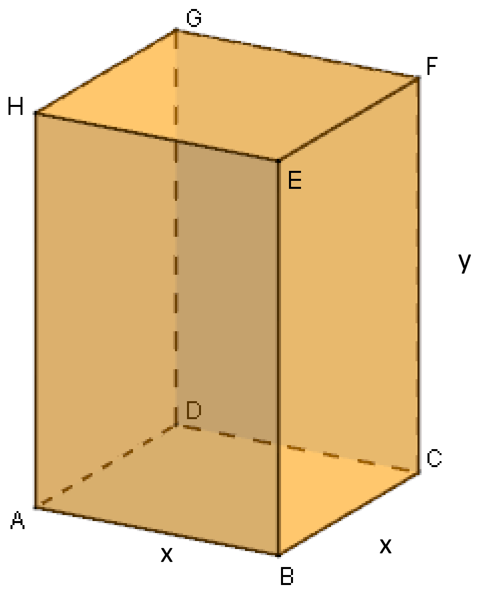
Exercice 72 Résolution détaillée

On commence par faire une figure :



1. Le volume du parallélépipède rectangle est V = aire de la base × hauteur donc $V = x^2y$.
Or $V = 8$ en m³ et x et y sont les mesures en mètres, donc $8 = x^2y$ et par suite $y = \frac{8}{x^2}$ (car $x \neq 0$).

2. On protège les parois d'un produit anti-rouille. On supposera que le prix du produit est proportionnel à la quantité de produit à utiliser, quantité elle-même proportionnelle à l'aire totale des parois à protéger, c'est-à-dire à l'aire latérale du parallélépipède rectangle.

> **Conseil**
>
> On pourra relire l'exercice « Mener une recherche » page 116. Cette question s'étudie en suivant une démarche analogue.

Etape 1 : **Déterminer l'aire latérale**

On doit ajouter les aires :

- des faces ABCD et HEFG qui sont des carrés d'aire x^2 chacune.
- des quatre autres faces qui sont des rectangles de dimensions x et y donc d'aire xy chacune.

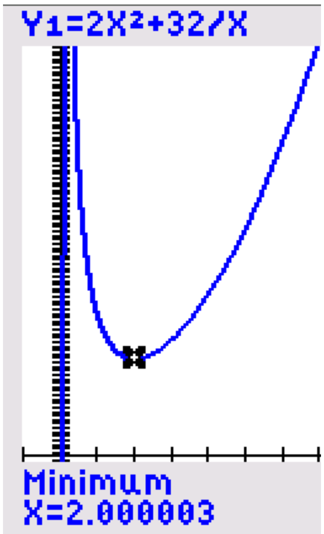
L'aire latérale est donc $2x^2 + 4xy$.

Etape 2 : **Introduire une fonction**

Ayant établi un lien entre y et x à la question 1, on peut exprimer l'aire latérale en fonction de x seul pour introduire une fonction de la variable x :
$2x^2 + 6xy = 2x^2 + 4x\frac{8}{x^2} = 2x^2 + \frac{32}{x}$
On introduit donc la fonction A définie par $A(x) = 2x^2 + \frac{32}{x}$ pour $x > 0$.

Etape 3 : **Déterminer le minimum de la fonction A**

Piste 1 : **Graphiquement**



Pour un problème concret comme celui-ci, où des valeurs approchées pourraient suffire comme solutions, on peut tracer la courbe représentant la fonction A et déterminer graphiquement son minimum.
Mais cela restera une conjecture.
On conjecture donc que l'aire latérale est minimale pour $x \approx 2$.

Piste 2 : **Etude des variations de la fonction A.**

La fonction A est une fonction rationnelle définie et dérivable sur] 0 ; +∞[.
Le sens de variation de A est donné par le signe de sa dérivée.

Calcul de $A'(x)$

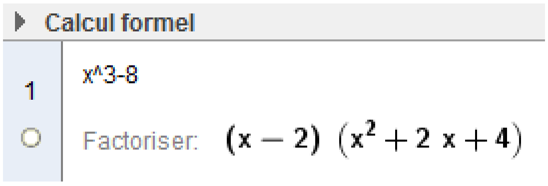
$A(x) = 2x^2 + 32 \times \frac{1}{x}$ donc $A'(x) = 2 \times 2x + 32\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x - \frac{32}{x^2} = \frac{4x^3-32}{x^3} = \frac{4(x^3-8)}{x^3}$.

Etude du signe de $A'(x)$

$x > 0$ donc $x^3 > 0$ et $A'(x)$ a même signe que $x^3 - 8$.
Plusieurs méthodes permettent d'étudier le signe de $x^3 - 8$, par exemple :

- Méthode 1 :
  On trace la courbe représentant la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 8$: elle semble être strictement croissante et s'annuler en 2, être négative pour $x < 2$ et positive pour $x > 2$. Ceci n'est qu'une conjecture.
  On peut cependant le prouver rapidement car g est dérivable sur R avec $g'(x) = 3x^2$ qui est positive et ne s'annule qu'en 0.
  Donc g est strictmeent croissante sur R. Or $g(2) = 2^3 - 8 = 0$.
  On en déduit que :
  si $x < 2$ alors $g(x) < g(2)$ soit $g(x) < 0$
  si $x > 2$ et $g(x) > g(2)$ soit $g(x) > 0$.

- Méthode 2 :
  On factorise $x^3 - 8$ avec un logiciel de calcul formel pour étudier son signe.
  Par exemple avec le calcul formel de GeoGebra, on obtient le résultat ci-contre.



  $x^2 + 2x+4$ est un trinôme de discriminant-12, négatif, donc il est toujours du signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire positif.
  Donc $x^3 - 8$ est du signe de $x - 2$.

Finalement, on obtient le signe de $A'(x)$:
pour $x = 2, A'(x) = 0$,
pour $0 < x < 2$, $x^3 - 8 < 0$ donc $A'(x) < 0$,
Pour $2 < x$, $x^3 - 8 > 0$ donc $A'(x) > 0$.

<u>Détermination du minimum de la fonction A</u>

Du signe de $A'(x)$, on déduit que A est strictement décroissante sur]0 ;2] et strictement croissante sur [2 ; +∞ [
On en déduit alors que A admet un minimum pour $x = 2$.
Pour $x = 2$, on a $y = \frac{48}{x^2} = 12$.
Le conteneur de volume 8 m³ qui coûte le moins cher en produit antirouille est donc celui de dimensions 2 m et 12 m.

Remarque

On peut aussi dresser le tableau de variations de la fonction A :

x	0		2		$+\infty$
$A'(x)$	||	-	0	+	
$A(x)$	||	$\searrow$	24	$\nearrow$	