Exercice 71 Résolution détaillée

On pourra télécharger des animations sur le site.

1. Le triangle ABM est rectangle en M.
Le triangle ATM est rectangle en T puisque la tangente en T au quart de cercle est perpendiculaire au rayon [AT].
Ces deux triangles ont un côté commun [AM] et deux côtés égaux : AB = AT (rayon du quart de cercle).
Par l'égalité de Pythagore dans chacun des triangles, on déduit que MT = MB = x.

2. Un raisonnement analogue dans les triangles ATN et AND permet d'écrire que NT = ND = y.
Par conséquent MN = MT + TN = $x + y$.

3. Dans le triangle MCN, rectangle en C, par l'égalité de Pythagore, $MN^2 = MC^2 + CN^2$.
Or MC = CB – MB = 1 – x et CN = CD – DN = 1 – y.
Donc $MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$.

4. La question 2. Permet d'écrire que $MN^2 = (x+y)^2$.
De la question 3., on déduit donc l'égalité :
$$(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 .$$
En développant chaque membre, on obtient :
$$x^2 + 2xy + y^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2.$$
Soit, en simplifiant :
$$2xy = 2 - 2x - 2y.$$
On transforme en rassemblant les termes contenant y dans le membre de gauche :
$$2xy + 2y = 2 - 2x.$$
Soit encore
$$2y(x+1) = 2 - 2x.$$
D'où l'on tire y en fonction de x :
$$y = \frac{2-2x}{2(x+1)} \text{ car } x + 1 \neq 0$$
On peut simplifier en :
$$y = \frac{2(1-x)}{2(x+1)} = \frac{1-x}{x+1}.$$

On en déduit maintenant MN en fonction de x seul :
De MN = $x + y$, on déduit que MN = $x + \frac{1-x}{x+1}$
Soit
$$MN = \frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{1-x}{x+1} = \frac{x^2+x+1-x}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}.$$

Méthode

Ayant établi que
$$2xy = 2 - 2x - 2y \quad (1)$$
Pour exprimer y en fonction de x, Il faut traiter l'égalité (1) comme une équation à l'inconnue y, en considérant que x est connu.

5. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.
Il s'agit d'une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition [0 ; 1].
Le sens de variation de f est donné par le signe de sa dérivée.

Etape 1 : **Calcul de $f'(x)$.**

On a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = x + 1$.

et $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$

D'où $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)\times 1}{(x+1)^2}$

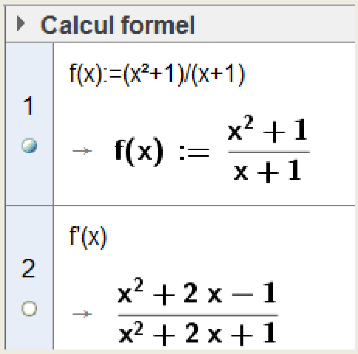
$f'(x) = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}}$.

Remarque : on ne développe pas le dénominateur pour faciliter l'étude de signe qui suit.

Conseil

Penser à vérifier avec un logiciel de calcul formel, par exemple avec GeoGebra.



Etape 2 : **Etudier le signe de $f'(x)$.**

Le dénominateur de $f'(x)$ est un carré, toujours positif.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de son numérateur $x^2 + 2x - 1$.

C'est un trinôme de degré 2, dont le coefficient de x^2 est positif.

Il est donc positif sauf entre ses racines s'il en a.

Le discriminant de $x^2 + \ 2x - 1$ est

$\Delta = b^2 - 4ac$ = 4-4(-1) = 8.

$\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$,

$x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

On remarque que seule $x_2 \approx 0{,}4$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$ car $x_1 < 0$.

Finalement :

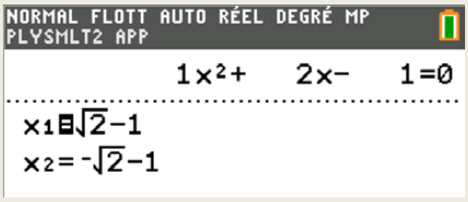
$x^2 + 2x - 1$ est négatif sur $[0 ; x_2]$

et positif sur $[x_2 ; 1]$.

Conseil

On peut aussi chercher els racines de $x^2 + 2x - 1$ avec un logiciel ou une calculatrice.

Avec une TI-83 Premium CE :



Etape 3 : **Etablir le tableau de variations de f**

On déduit le tableau de variations de f :

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
Signe de $f'(x)$		-	0	+	
Variations de f	1	↘	$2\sqrt{2}-2$	↗	1

$f(-1+\sqrt{2}) = \frac{(-1+\sqrt{2})^2+1}{-1+\sqrt{2}+1} = \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

soit encore $\frac{(4-2\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{2} = 2\sqrt{2} - 2$.

Conseil

On peut calculer $f(-1 + \sqrt{2})$ avec une calculatrice ou un logiciel. Avec le calcul formel de GeoGebra :