Exercice 70 Résolution détaillée

1. Pour tout $x \in [-4\,;4], f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 4$.
u est dérivable sur $[-4\,;4], u'(x) = 1$.
v est dérivable sur $[-4\,;4]$ et pour tout
$x \in [-4\,;4], v(x) \neq 0$ et $v'(x) = 2x$.
Donc f est dérivable sur $[-4\,;4]$ et
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}.$$

Conseil

• Pour dériver une fonction, on commence par identifier le modèle. Ici, f est de la forme $\frac{u}{v}$.

• On vérifie les hypothèses de la propriété 7 du chapitre 3.

Pour tout $x \in [-4\,;4], (x^2+4)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $4 - x^2$.

$4 - x^2 = (2-x)(2+x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -2 et 2.
D'où le tableau :

x	-4		-2		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{5}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{5}$

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction, on peut dériver cette fonction et étudier le signe de la dérivée.
• On dérive la fonction.
• On étudie le signe de la dérivée.

2. Le minimum de f sur $[-4\,;4]$ est $-\frac{1}{4}$ qui est atteint pour $x = -2$.
Le maximum de f sur $[-4\,;4]$ est $\frac{1}{5}$ qui est atteint pour $x = 2$.

3. La fonction f est définie pour tout $x \in [-4\,;4]$ et $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{5}$.
Donc une fenêtre adaptée peut être :
xmin=-4 ; xmax = 4 ; ymin = -0,5 ; ymax = 0,5.

4. f est strictement croissante sur $[0\,;2]$, de plus $f(0) = 0$ *et* $f(2) = \frac{1}{4}$, donc pour tout $x \in [0\,;2], 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.
De plus, pour tout $x \in [2\,;4], \frac{1}{5} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$ par lecture du tableau de variations.
Donc pour tout $x \in [0\,;4], 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.