Exercice 69 Résolution détaillée

1. Pour tout $x \in [-4\,;3]$, h est dérivable comme fonction polynôme
et $h'(x) = 9x^2 + 22x + 5$.
On étudie le signe de $h'(x)$:
$h'(x)$ est un trinôme du second degré,
son discriminant est :
$\Delta = 22^2 - 4 \times 5 \times 9 = 19 \times 16$.

$h'(x) = 0$ a pour solutions
$x_0 = \frac{-22-4\sqrt{19}}{18} = \frac{-11-2\sqrt{19}}{9} \approx -2{,}19$

$$x_1 = \frac{-22+4\sqrt{19}}{18} = \frac{-11+2\sqrt{19}}{9} \approx 0{,}25$$

x	-4		x_0		x_1		3
signe de $h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	-36	↗	M	↘	m	↗	195

Avec $M = f(x_0) \approx 10{,}3$ et $m = f(x_1) \approx -0{,}61$.

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction, on peut dériver cette fonction et étudier le signe de la dérivée.

Conseil

Pour dériver une fonction, on commence par identifier le modèle : ici f est une fonction polynôme.

2. Pour tout $x \in [-4\,;\,x_0]$, la fonction h est strictement croissante et $-36 \leq h(x) \leq M \approx 10{,}3$;
or $3 \in [-36\,;M]$ donc l'équation $h(x) = 3$ admet une unique solution sur $[-4\,;x_0]$.

De même, h est strictement décroissante sur $[x_0\,;\,x_1]$ et $m \leq h(x) \leq M$, $3 \in [m\,;M]$.
Donc l'équation $h(x) = 3$ admet une unique solution sur $[x_0\,;\,x_1]$.

De même, $3 \in [m\,;195]$ et h est strictement croissante sur $[x_0\,;3]$ donc l'équation $h(x) = 3$ a une unique solution sur $[x_0\,;3]$.

Conclusion : $h(x) = 3$ admet 3 solutions.

Méthode

Pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = k$:
- on commence par considérer un intervalle sur lequel la fonction h est monotone,
- si k est compris entre les bornes de l'intervalle image, l'équation $h(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle considéré.

3. La plus grande des solutions est comprise entre 0,25 et 1.
À l'aide de la calculatrice, cette solution α est environ 0,33, à 10^{-2} près.

X	Y1
0.32	2.8247
0.33	2.9557
0.34	3.0895
0.35	3.2261

Méthode

Pour déterminer une valeur approchée de solution d'une équation, on peut faire un tableau de valeur en ajustant au fur et à mesure le pas de la table.

4. Les deux autres solutions sont -3 et -1.On place ces valeurs dans le tableau de variations et on obtient :

$$\text{pour tout } x \in]-3\,;\,-1[\cup]\alpha\,;3],\, h(x) > 3.$$