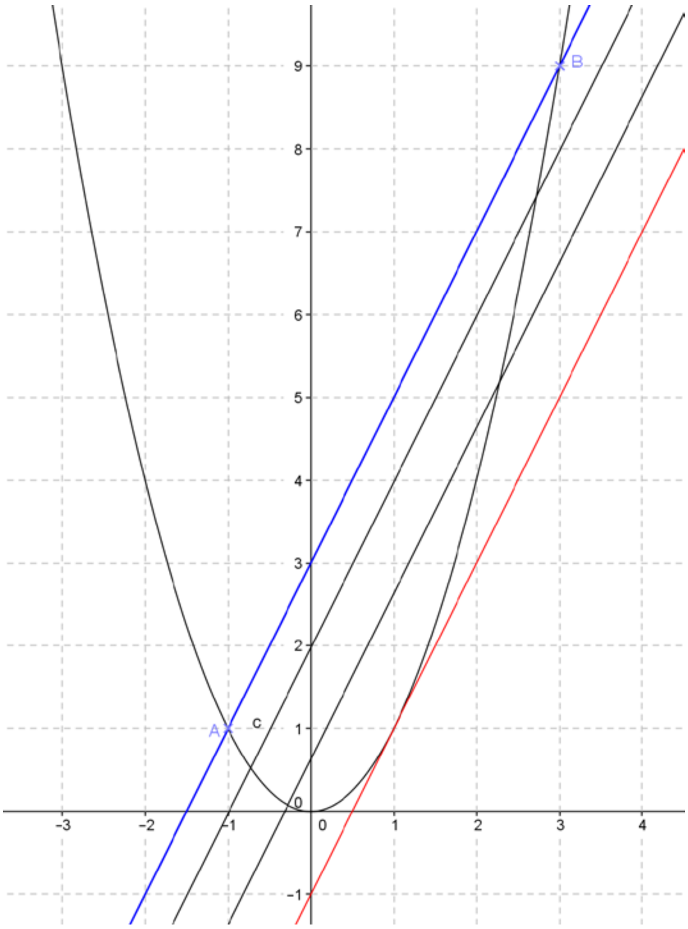
Exercice 91 Résolution détaillée

1. On peut effectuer le tracé à la main ou avec un logiciel. En essayant de tracer des parallèles à (AB), il semble qu'il y en ait une qui soit tangente à la parabole d'équation $y = x^2$, celle tracée en rouge ci-dessous.

> **Conseil**
>
> Pensez à utiliser un logiciel de géométrie pour effectuer les tracés et émettre des conjectures.



On conjecture que la tangente à la parabole en son point d'abscisse 1 est parallèle à la droite (AB).

2. La tangente T à la courbe $\mathcal{P}$ en un point d'abscisse a admet pour coefficient directeur $f'(a)$.
On exprimera donc qu'elle est parallèle à la droite (AB) en disant que ces deux droites ont même coefficient directeur.

> **Conseil**
>
> La direction de la tangente T à la courbe $\mathcal{P}$ en un point d'abscisse a est donnée par son coefficient directeur $f'(a)$.

On en déduit une stratégie en trois étapes :
Étape 1 : trouver le coefficient directeur $f'(a)$ de T.

Étape 2 : trouver le coefficient directeur de la droite (AB).

Étape 3 chercher a pour que ces deux coefficients directeurs soient égaux.

Étape 1 : $f(x) = x^2$ donc $f'(x) = 2x$ et par suite $f'(a) = 2a$.

Étape 2 : On note $(x_{\mathrm{A}}; y_{\mathrm{A}})$ les coordonnées de A et $(x_{\mathrm{B}}; y_{\mathrm{B}})$ celles de B.

Comme A et B sont distincts, on doit avoir $x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$.
(Si $x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}}$ alors $f(x_{\mathrm{A}}) = f(x_{\mathrm{B}})$ soit $y_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{B}}$ donc A et B sont confondus)

La droite (AB) a donc pour coefficient directeur :

$\frac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}} = \frac{x_{\mathrm{B}}^2-x_{\mathrm{A}}^2}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}} = \frac{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})(x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{A}})}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}} = x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}$.

Étape 3 : On cherche a tel que $f'(a) = x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}$.

Ceci s'écrit encore $2a = x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}$ d'où $a = \frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}$.

Il existe donc bien une tangente à $\mathcal{P}$ (et une seule) parallèle à la droite (AB) : il s'agit de la tangente au point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}$.

On peut tracer facilement cette tangente connaissant les points A et B :
- on place le « milieu » a des deux abscisses x_{A} et x_{B},
- on repère le point M de $\mathcal{P}$ d'abscisse a,
- on trace la parallèle à (AB) passant par M, c'est la tangente cherchée.

Remarque

On ne connaît ni $\boldsymbol{a}$, ni $\boldsymbol{x_A}$ ni $\boldsymbol{x_B}$, mais c'est $\boldsymbol{a}$ que l'on cherche.
$f'(a) = x_B + x_A$ est une équation à l'inconnue a où on considère x_A et x_B comme connus.

Conseil

On contrôle sur le cas étudié à la question 1 :
$x_{\mathrm{A}} = -1, x_{\mathrm{B}} = 3$ et $\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2} = 1$.
Ce résultat est bien conforme à la conjecture effectuée à la première question.