Exercice 90 Résolution détaillée

1. voir le 3.c.

2. $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ pour tout x réel.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et $f'(x) = -2x + 4$.

Méthode

Pour dériver une somme, on utilise les propriétés 2,3 et 4.

3. a. $f'(x) = -2x + 4$
donc pour $x = 0, f'(0) = -2 \times 0 + 4 = 4$.
De même pour $x = 3, f'(3) = -2 \times 3 + 4 = -2$.

Méthode

Pour calculer $f'(0)$ lorsque l'on connait $f'(x)$, on remplace x par 0.

b. $f'(0)$ et $f'(3)$ sont les coefficients directeurs des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 0 et 3.

c. Le point A a pour coordonnées $\big(0\,;f(0)\big)$ soit A$(0\,;3)$.
La tangente d en A à la courbe C a pour équation réduite
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = 4x + 3$.
B est le point de C d'abscisse 3 d'où B$(3\,;f(3))$, soit B$(3\,;6)$.

Méthode

On utilise la propriété 1 :
L'équation réduite de la tangente en A d'abscisse a est
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

La tangente d' à C en B a pour coefficient directeur $f'(3) = -2$ (d'après 3.a.) donc l'équation réduite de d' est $y = -2x + b$, où b est un réel à déterminer.

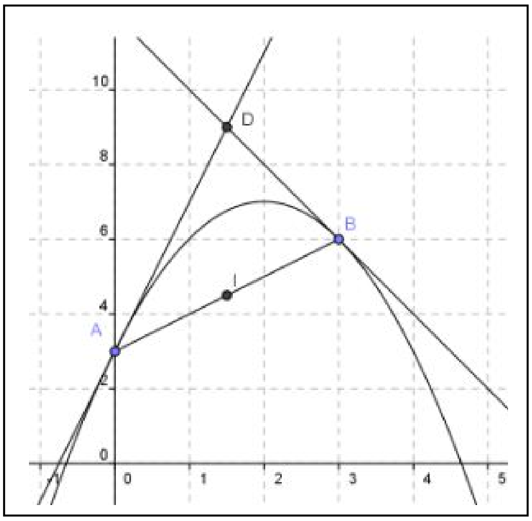
Or B$(3\,;6)$ appartient à d' donc les coordonnées de B vérifient l'équation $y = -2x + b$
d'où $6 = -2 \times 3 + b$ donc $b = 12$
et $d' : y = -2x + 12$.

Soit D$(x_D; y_D)$ le point d'intersection de d et d'.
Le couple $(x_D; y_D)$ est solution du système

$$\begin{cases} y = 4x + 3 \\ y = -2x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x + 3 \\ 4x + 3 = -2x + 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = -2 \times 1{,}5 + 12 = 9 \end{cases}$$

Donc D a pour coordonnées $(1{,}5\,;9)$.



Conseil

On contrôle graphiquement les résultats des questions c et d.

d. $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+3}{2}=1{,}5$ qui est l'abscisse du milieu I de [AB].

4. Généralisation

Soit $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$.

a. La tangente en A à C a pour équation réduite
$y=f'(a)(x-a)+f(a)=(-2a+4)(x-a)+(-a^2+4a+3)$,
d'où $y=(-2a+4)x+a^2+3$.

b. De même, la tangente en B à C a pour équation réduite $y=(-2b+4)x+b^2+3$.
Le point d'intersection de ces deux tangentes vérifie le système :

$$\begin{cases} y=(-2a+4)x+a^2+3 \\ y=(-2b+4)x+b^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=(-2a+4)x+a^2+3 \\ (-2a+4)x+a^2+3=(-2b+4)x+b^2+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=(-2a+4)x+a^2+3 \\ (-2a+2b)x=b^2-a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=(-2a+4)x+a^2+3 \\ x=\dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-ab+2a+2b+3 \\ x=\dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

Or le milieu de [AB] a pour abscisse $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{a+b}{2}$.
Donc le point d'intersection des tangentes à C en A et B a même abscisse que le milieu de [AB].