Modèle de probabilité

Exercice 1

1. Comme les issues 1, 2, 3 et 4 sont supposées équiprobables, le modèle de probabilité est :

numéro k	1	2	3	4
probabilité p_k	0,25	0,25	0,25	0,25

2. On peut modéliser les fréquences observées sur un échantillon de grande taille par p_1, p_2, p_3 et p_4 tels que :

$$p_1 = 3p_2\,;\ p_2 = p_3\,;\ p_4 = 2p_2\,.$$

En reportant dans l'égalité $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, on obtient :

$$3p_2 + p_2 + p_2 + 2p_2 = 1, \text{ soit } 7p_2 = 1.$$

Il en résulte le modèle suivant :

numéro k	1	2	3	4
probabilité p_k	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

3. La proportionnalité des probabilités p_1, p_2, p_3 *et* p_4 et des numéros 1, 2, 3 et 4 s'écrit :

$$p_1 = k \times 1\,,\ \ p_2 = k \times 2,\ \ p_3 = k \times 3 \ \text{ et } \ p_4 = k \times 4,$$

où k est le coefficient de proportionnalité.

Leur somme étant égale à 1, on obtient : $10k = 1$ et donc $k = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

D'où le modèle suivant :

numéro k	1	2	3	4
probabilité p_k	0,1	0,2	0,3	0,4

Opérations et événements

Exercice 2

Cette expérience aléatoire comporte 100 issues équiprobables : tous les entiers de 1 à 100.
1. Les événements A et B sont réalisés simultanément lorsque l'entier tiré au hasard est à la fois un carré et un cube.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64						

Il existe deux issues « favorables » à la réalisation simultanée de A et B :

$$1 = 1^2 = 1^3 \text{ et } 64 = 8^2 = 4^3.$$

Les événements A et B ne sont donc pas incompatibles.

2. D'après le tableau, il existe 10 issues « favorables » à l'événement A et 4 issues « favorables » à l'événement B.
Dans ce modèle d'équiprobabilité, on a donc :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{10}{100} = 0{,}1 \text{ et } p(\mathrm{B}) = \frac{4}{100} = 0{,}04.$$

D'après la question 1, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{100} = 0{,}02$.

Par propriété, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$

D'où $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}1 + 0{,}04 - 0{,}02 = 0{,}12$.

3. $\mathrm{N} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$. N est l'événement contraire de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

D'où $p(\mathrm{N}) = 1 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}88$.

Avec un tableau ou un arbre

Exercice 3

Notons T et E, respectivement, les événements : « le jeune rencontré au hasard pratique le tir à l'arc » et « le jeune rencontré au hasard pratique l'escalade ».
Portons dans un tableau à double entrée les effectifs connus (en rouge) :

	T	$\overline{\mathrm{T}}$	
E	15	9	24
$\overline{\mathrm{E}}$	30	6	36
	45	15	60

On en déduit les effectifs manquants (en bleu).

Les 60 issues étant équiprobables, on en déduit :

a. $p(\mathrm{T}) = \dfrac{45}{60} = 0{,}75$

b. $p(\mathrm{E}) = \dfrac{24}{60} = 0{,}4$

c. $p(\mathrm{T} \cup \mathrm{E}) = \dfrac{15+30+9}{60} = \dfrac{54}{60} = 0{,}9$

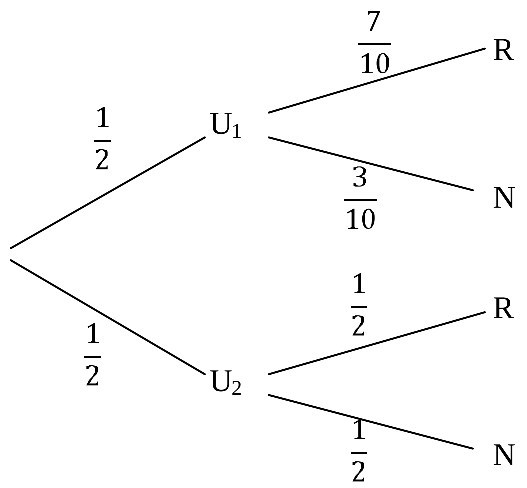
d. $p(\mathrm{T} \cap \mathrm{E}) = \dfrac{15}{60} = 0{,}25$

e. $p(\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{E}) = \dfrac{9}{60} = 0{,}15.$

Remarque : on peut vérifier la propriété $p(\mathrm{T} \cup \mathrm{E}) + p(\mathrm{T} \cap \mathrm{E}) = p(\mathrm{T}) + p(\mathrm{E})$.

Exercice 4

1. Lorsqu'on tire au hasard une boule de l'urne U_1, sur les 10 issues équiprobables, trois sont favorables à la réalisation de R et sept à celle de N.
De même, lorsqu'on tire une boule de l'urne U_2, sur les 10 issues équiprobables, cinq sont favorables à R et cinq à N. Il en résulte l'arbre de probabilités suivant :



2. D'après les règles de fonctionnement d'un arbre pondéré, on a :

$p(\mathrm{U_1} \cap \mathrm{R}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20} = 0{,}15.$

$p(\mathrm{R}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0{,}15 + 0{,}25 = 0{,}4.$

On en déduit : $p(\mathrm{N}) = 1 - p(\mathrm{R}) = 0{,}6$.