Exercice 76

1.a. Comparaison pour un prix de 4 €.
On lit graphiquement que pour un repas à 4 €, l'offre est de 15 000 repas, la demande est de 25 000 repas.
La demande est supérieure à l'offre ; on doit pouvoir vendre tout ce qui sera produit.

1. b. Comparaison pour un prix de 8€.
L'offre est de 25 000 repas, la demande n'est plus que de 5 000 repas. L'offre est très supérieure à la demande. On pourra produire 10 000 repas de plus que pour un prix de 4 € mais on ne pourra pas tous les vendre.

2.a. Graphiquement le prix d'équilibre correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes représentées : 5 €.

2.b. Graphiquement l'offre est supérieure à la demande pour un prix supérieur à 5€ et inférieur ou égal à 8 €.

3.a. $f(x) - g(x) = -\frac{75}{x} + 35 - (-5x + 45)$
d'où $f(x) - g(x) = -\frac{75}{x} + 35 + 5x - 45$
soit $f(x) - g(x) = -\frac{75}{x} + 5x - 10.$
En réduisant au même dénominateur :

$$f(x) - g(x) = \frac{-75 + x(5x - 10)}{x}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{-75 + 5x^2 - 10x}{x}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{5x^2 - 10x - 75}{x}$$

Développons $5(x-5)(x+3)$:
$5(x-5)(x+3) = 5(x^2 - 5x + 3x - 15)$
$5(x-5)(x+3) = 5(x^2 - 2x - 15)$
$5(x-5)(x+3) = 5x^2 - 10x - 75$

Des deux résultats en bleu, on déduit que pour tout x de [4 ; 8],

$$f(x) - g(x) = \frac{5(x-5)(x+3)}{x}$$

Conseil
Quand on soustrait une expression à une autre, il faut être vigilant car il est bien souvent nécessaire d'ajouter des parenthèses !

Méthode
Pour démontrer que deux expressions sont « égales pour tout x », il y a plusieurs méthodes (voir exercice résolu 2 page 85).
Comme il est plus simple bien souvent de développer que de factoriser, on a choisi ici de développer les numérateurs de f(x) − g(x) d'une part et de $\frac{5(x-5)(x+3)}{x}$ d'autre part pour montrer qu'ils sont égaux à une même expression.

3. b. Cherchons par le calcul quand l'offre et la demande sont égales, c'est-à-dire quand $f(x) = g(x)$ avec $x \in [4\,;8]$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{5(x-5)(x+3)}{x} = 0$

Ceci équivaut à $x \neq 0$ ET $5(x-5)(x+3) = 0$.
Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :
$5(x-5)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$ OU $x + 3 = 0$.
$5(x-5)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ OU $x = -3$.

Comme $x \in [4\,;8]$, la seule solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est 5.
L'offre et la demande sont donc égales quand le repas coûte 5 €.

Méthode

On doit résoudre une « équation-quotient » : on se ramène à un quotient égal à 0 puis on applique la propriété : « un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul » (page 88).

Conseil

Vérifier que la solution est bien cohérente avec celle trouvée graphiquement.

3. c. Sur l'intervalle $[4\,;8]$, on a $4 \leq x \leq 8$, donc x est positif. Par conséquent $f(x) - g(x)$ a même signe que $5(x-5)(x+3)$.
Comme 5 est positif, $5(x-5)(x+3)$ a même signe que $(x-5)(x+3)$.
Donc finalement sur $[4\,;\,8]$, $f(x) - g(x)$ a même signe que $(x-5)(x+3)$.

Pour résoudre la question **2.b** par le calcul, il faut résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ ce qui revient à $f(x) - g(x) > 0$.
Comme sur $[4\,;\,8]$, $f(x) - g(x)$ a même signe que $(x-5)(x+3)$, il suffit de résoudre l'inéquation $(x-5)(x+3) > 0$.

On peut faire un tableau de signes mais ce n'est pas indispensable. En effet, pour, $x \in [4\,;8]$, x est strictement positif, donc $x + 3$ est aussi strictement positif.
Par conséquent $(x-5)(x+3)$ a même signe que $x - 5$. Et $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$.

On en déduit finalement que $f(x) - g(x) > 0$ si et seulement si $x > 5$, avec $x \in [4\,;8]$.

Autrement dit l'offre est supérieure à la demande pour un prix supérieur à 5 € et inférieur ou égal à 8 €.

Conseil

On vérifie que l'on retrouve bien la même solution que celle obtenue par lecture graphique à la question **2.b.**