

Exercice 75

1. Résoudre $f(x) = 0$.

On factorise :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x - 5) = 0$$

On applique la « propriété du produit nul » :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0$$

Par conséquent :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}$$

Les solutions sont 0 et $\frac{5}{2}$.

Méthode

Cette équation n'est pas une équation du premier degré. On applique donc la méthode utilisée dans l'exercice résolu 6 page 89 :

- rassembler les termes dans le premier membre pour que le second membre soit nul (inutile ici, c'est déjà le cas !) ;
- factoriser le premier membre pour pouvoir appliquer la « propriété du produit nul » : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

On peut revoir l'exercice résolu 8 page 114.

2. La fonction f est une fonction polynôme de degré 2 car $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = -5, c = 0$.

Comme $a > 0$, f est d'abord strictement décroissante puis strictement croissante.

Déterminons son extremum :

La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses aux points A (0 ; 0) et B ($\frac{5}{2}$; 0) d'après la question 1.

La courbe admet (en repère orthogonal) un axe de symétrie qui a donc pour équation

$$x = \frac{(0+\frac{5}{2})}{2} = \frac{5}{4}.$$

Donc f admet son extremum en $x = \frac{5}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Calculons } f\left(\frac{5}{4}\right) &= 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{4} \\ f\left(\frac{5}{4}\right) &= 2 \times \frac{25}{16} - \frac{25}{4} = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} = -\frac{25}{8} \end{aligned}$$

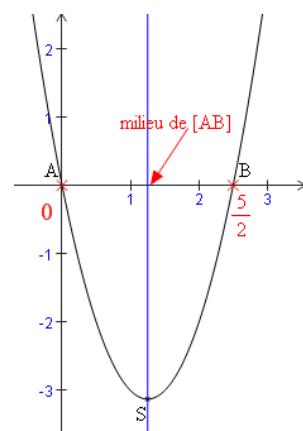
Donc f admet pour extremum $-\frac{25}{8}$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$		$-\frac{25}{8}$	

Conseil

On peut s'aider de ce dessin, fait à main levée ou dans la tête...



Vérifier ces résultats en représentant graphiquement f sur la calculatrice et en utilisant l'outil Trace.

3. Indiquons les valeurs qui annulent f dans le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)$			$-\frac{25}{8}$		

Du sens de variation de f , on en déduit que :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est donc :

$$]-\infty; 0[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$$

Conseil

Vérifier ce résultat graphiquement à la calculatrice.