Exercice 74

a. Résoudre $3x > x^2$.

• On rassemble tous les termes dans le premier membre
$3x > x^2 \iff 3x - x^2 > 0$.

• On factorise le premier membre
$3x > x^2 \iff x(3-x) > 0$.

• On étudie le signe du produit $x(3-x)$ en étudiant le signe de chaque facteur puis en dressant un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de x		−	0	+		+	
signe de $-x+3$		+		+	0	−	
signe du produit $x(-x+3)$		−	0	+	0	−	

• On lit sur le tableau les valeurs de x pour lesquelles le produit est strictement positif.
L'ensemble des solutions est $]0\,;3[$.

Méthode

On applique la méthode décrite à l'exercice résolu 3 page 135

Conseil

Pour étudier le signe de $3-x$, on a intérêt à réécrire cette expression sous la forme habituelle $ax+b$, c'est-à-dire $-x+3$, pour bien identifier le coefficient de x qui est -1. On sait alors que la fonction affine $x \longmapsto -x+3$ est strictement décroissante, donc « positive avant de s'annuler et négative après ».

Vérifier le résultat en traçant les courbes d'équation $y = 3x$ et $y = x^2$ sur la calculatrice pour résoudre graphiquement l'inéquation (voir cours 1 page 132)

b. Résoudre $(x+1)^2 > 2(x+1)$

Solution 1

• On rassemble tous les termes dans le premier membre

$(x+1)^2 > 2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 2(x+1) > 0.$

• On factorise le premier membre

$(x+1)^2 > 2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x+1-2) > 0.$

$(x+1)^2 > 2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x-1) > 0$.

• On étudie le signe du produit

$(2x+1)(2x+1)$ en étudiant le signe de chaque facteur puis en dressant un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

• On lit sur le tableau les valeurs de x pour lesquelles le produit est strictement positif.

L'ensemble des solutions est donc

$]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$.

Solution 2

Quand on arrive dans la solution 1 à l'équivalence

$(x+1)^2 > 2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x-1) > 0,$

on peut remarquer la forme $(x+1)(x-1)$

et penser à une identité remarquable.

On sait qu'en développant on n'obtiendra pas de « terme en x ».

On obtient en effet :

$(x+1)^2 > 2(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1.$

On sait résoudre cette inéquation directement en $x > 1$ ou $x < -1$ (voir exercice résolu 3 page 109).

On obtient bien sûr le même ensemble de solution.

Méthode

On applique la méthode décrite à l'exercice résolu 3 page 135.

Conseil

Vérifier le résultat en traçant les courbes d'équation $y = (x+1)^2$ et $y = 2(x+1)$ sur la calculatrice pour résoudre graphiquement l'inéquation (voir cours 1 page 132).

c. Résoudre $\frac{1}{-x+2} \geq 0$.

Comparer une expression avec 0 c'est étudier son signe.
Or un nombre non nul et son inverse ont le même signe :
$\frac{1}{\mathrm{A}}$ est positif ou nul si et seulement si A est strictement positif.

On en déduit :
$\frac{1}{-x+2} \geq 0 \iff -x+2>0 \iff 2>x$.

L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;2[$.

Attention :
pour $x=2$, on a $-x+2=0$ et le quotient $\frac{1}{-x+2}$ n'existe pas.

Méthode

On pourrait appliquer la méthode générale décrite à l'exercice résolu 4 page 135, mais le numérateur étant toujours positif, on peut éviter un tableau de signes et s'intéresser uniquement au signe du dénominateur.

Conseil

Vérifier le résultat en traçant la courbe d'équation $y=\frac{1}{-x+2}$ sur la calculatrice pour résoudre graphiquement l'inéquation.