Résoudre graphiquement une inéquation

Exercice 1

Par lecture graphique, il semble que :

a. L'inéquation $f(x) \leq -1$ a pour ensemble de solutions $[0\ ;\ 3]$.

b. L'inéquation $f(x) > -1$ a pour ensemble de solutions $[-5\ ;\ 0[$.

c. L'inéquation $f(x) \leq 1$ a pour ensemble de solutions $[-5\ ;-3] \cup [-1\ ;3]$.

d. L'inéquation $f(x) \geq 1$ a pour ensemble de solutions $\{-5\} \cup [-3\ ;\ -1]$.

Exercice 2

Par lecture graphique, il semble que :

a. L'inéquation $f(x) \leq 2$ a pour ensemble de solutions $[-6\ ;2]$.

b. L'inéquation $f(x) > -1$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\ ;-4[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$.

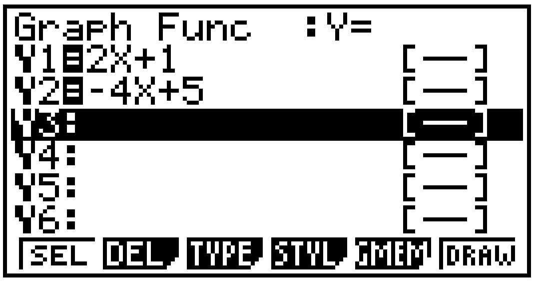
c. L'inéquation $g(x) \leq 3$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\ ;-2] \cup [1{,}3\ ;+\infty[$ (à la précision de lecture graphique près).

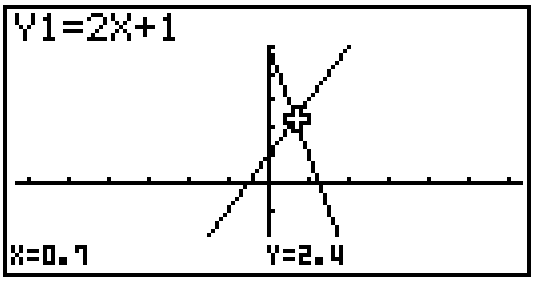
d. L'inéquation $g(x) \geq f(x)$ a pour ensemble de solutions $[-4\ ;2]$.

Exercice 3

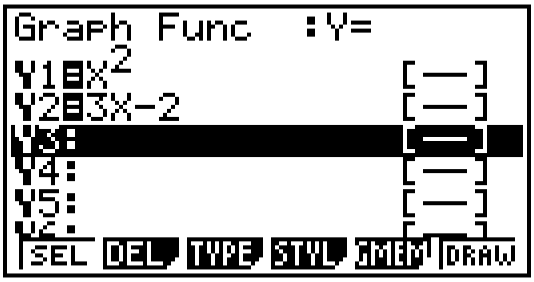
Par lecture graphique sur la calculatrice, il semble que :

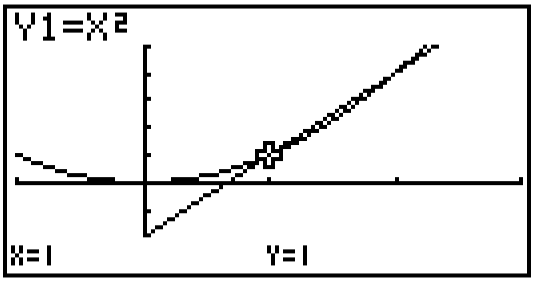
a. L'inéquation $2x + 1 \leq -4x + 5$ a pour ensemble de solutions $]-\infty; 0{,}7]$

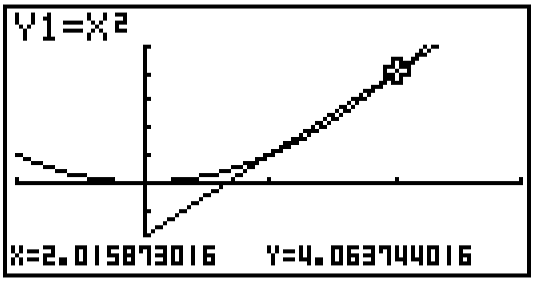




b. L'inéquation $x^2 < 3x - 2$ a pour ensemble de solutions $]\ 1\ ;2[$







Étudier un signe

Exercice 4

$g(-5)$ est positif ; $g(1{,}8)$ est négatif ; $g(0)$ est négatif.

Exercice 5

a. Pour tout x réel, x^2 est positif ou nul donc $-2x^2$ est négatif ou nul :
$f(x) \leq 0$ pour tout réel x.
b. Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ est toujours positive ou nulle donc $2\sqrt{x}$ aussi et a fortiori $2\sqrt{x}+3$:
$f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
c. Pour tout $x > 5$, x est strictement positif $\frac{2}{x}$ aussi ; son opposé $-\frac{2}{x}$ est donc strictement négatif : $f(x) < 0$ pour tout $x > 5$.

Exercice 6

1. Par lecture graphique, en parcourant la courbe de la gauche vers la droite :
$f(x)$ est strictement négatif sur $[-3{,}5\,;\,-1[$, $f(x) = 0$ pour $x = -1$, $f(x)$ est strictement positif sur $]-1\,;2[$, $f(x) = 0$ pour $x = 2$, $f(x)$ est strictement négatif sur $]2\,;\,3]$.

2. Tableau de signes :

x	$-3{,}5$		-1		2		3
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 7

a. $f(x) = 2x - 10$
f est une fonction affine strictement croissante. De plus, $f(x) = 0 \iff x = 5$.
Elle est donc négative « avant 5 » et positive « après 5 » d'où le tableau :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $2x - 10$		$-$	0	$+$	

b. $f(x) = -x + 4$
f est une fonction affine strictement décroissante. De plus, $f(x) = 0 \iff x = 4$.
Elle est donc positive « avant 4 » et négative « après 4 » d'où le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $-x + 4$		$+$	0	$-$	

Exercice 8

a. $f(x) = 2 - 3x$
f est une fonction affine strictement décroissante ($f(x) = -3x + 2$ avec -3 qui est négatif). De plus, $f(x) = 0 \iff x = \frac{2}{3}$.
Elle est donc positive « avant $\frac{2}{3}$ » et négative « après $\frac{2}{3}$ » d'où le tableau :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $-x + 4$		$+$	0	$-$	

b. $f(x) = 3x + 1$

f est une fonction affine strictement croissante. De plus, $f(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$.

Elle est donc négative « avant $-\frac{1}{3}$ » et positive « après $-\frac{1}{3}$ » d'où le tableau :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $2x - 10$		$-$	0	$+$	

Exercice 9

1. Tableau complété

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
Signe de $5 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $4 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du produit $(5 + x)(4 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Tableau du quotient

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
Signe de $5 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $4 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du quotient $\dfrac{5 + x}{4 - x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Exercice 10

1. Signe de $(x + 4)(-3x + 1)$

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-3x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du produit $(x + 4)(-3x + 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $(x + 4)(-3x + 1)$ est positif ou nul sur $[-4\,;\frac{1}{3}]$

et négatif ou nul sur $]-\infty\,;\,-4] \cup [\frac{1}{3}\,;\,+\infty[$.

2. Signe de $\frac{x+4}{-3x+1}$

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de$x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-3x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du quotient $\dfrac{5 + x}{4 - x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc $(x + 4)(-3x + 1)$ est positif ou nul sur $[-4\,;\frac{1}{3}[$

et négatif ou nul sur $]-\infty\,;\,-4] \cup\,]\frac{1}{3}\,;\,+\infty[$.

Exercice 11

1. Signe de $(x+3)(x+2)$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du produit $(x+3)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $(x+3)(x+2)$ est négatif ou nul sur $[-3\,;\,-2$
et positif ou nul sur $]-\infty\,;\,-3] \cup [-2\,;\,+\infty[$.

2. Signe de $\frac{x+2}{x+3}$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du quotient $\frac{x+2}{x+3}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc $\frac{x+3}{x+2}$ est négatif ou nul sur $]-3\,;-2\,]$ et positif ou nul sur $]-\infty\,;\,-3[\cup[-2\,;\,+\infty[$.

Résoudre algébriquement une inéquation

Exercice 12

À l'aide du tableau de signes ci-dessous, résoudre les inéquations suivantes :

a. L'inéquation $(2-x)(3x+12)<0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;\,-4\,[\cup]2\,;\,+\infty\,[$.

b. L'inéquation $(2-x)(3x+12)\geq 0$ a pour ensemble de solutions $[-4\,;2]$.

Exercice 13

a. Par le tableau de signes ci-dessous, on trouve que l'inéquation $(2x-1)(x+6)>0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;\,-6]\ \cup\,]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\,[$.

x	$-\infty$		-6		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit $(2x-1)(x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Par le tableau de signes ci-dessous, on trouve que l'inéquation $(-2x+4)(x+1)>0$ a pour ensemble de solutions $]-1\,;2\,[$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit $(-2x+4)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 14

a. Par le tableau de signes ci-dessous, on trouve que l'inéquation $x(1-x)>0$ a pour ensemble de solutions $]0\,;1[$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du produit $x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. Par le tableau de signes ci-dessous, on trouve que l'inéquation $-x(x+2)\leq 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;\,-2\,]\cup[0\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit $(-2x+4)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 15

a. $x>x^2 \Leftrightarrow x-x^2>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0$.
On retrouve la question **a.** de l'exercice 14 donc comme ensemble de solutions $]0\,;1[$.

b. $2x^2+4\leq(x+2)^2 \Leftrightarrow 2x^2+4-(x+2)^2\leq 0$.
On ne peut factoriser le premier membre ni en reconnaissant un facteur commun ou une identité remarquable, ni par étapes.
On le développe : $2x^2+4-(x+2)^2=2x^2+4-(x^2+4x+4)=x^2-4x$.
On peut désormais le factoriser en $x(x-4)$.
Ainsi $2x^2+4\leq(x+2)^2 \Leftrightarrow x(x-4)\leq 0$.
Par le tableau de signes ci-dessous, on trouve comme ensemble de solutions $[0\,;\,4]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du produit $x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 16

a. Par le tableau de signes ci-dessous, on trouve que l'inéquation $\frac{x+1}{x-1}\geq 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;\,-1\,]\cup\,]1\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du quotient $\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

b. $\frac{3+x}{2-x} < 2 \Leftrightarrow \frac{3+x}{2-x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2-x} < 0$.
Par le tableau de signes ci-dessous, on trouve que l'inéquation a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;\frac{1}{3}] \cup]2\;;+\infty[$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
Signe de $3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du quotient $\frac{3x-1}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Exercice 17 Choisir la bonne forme

a. On choisit la forme factorisée $(x-4)(x-6)$)pour dresser un tableau de signes de $f(x)$.
On obtient pour ensemble de solutions $[4\;;\;6]$.

b. On choisit la forme $(x-5)^2-1$ pour simplifier :
$f(x) \geq -1 \Leftrightarrow (x-5)^2 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0$.
Or $(x-5)^2$ est toujours positif ou nul. L'ensemble des solutions est donc $\mathbb{R}$.

c. On choisit la forme développée $x^2 - 10x + 24$ qui permet de se ramener à une équation du premier degré :
$f(x) \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 \leq x^2 \Leftrightarrow -10x + 24 \leq 0 \Leftrightarrow 2{,}4 \leq x$.
L'ensemble des solutions est $[2{,}4\;;+\infty|$.

Exercice 18 Choisir la bonne forme

a. On choisit la forme factorisée $(x+1)(x+3)$ pour dresser un tableau de signes de $f(x)$.
On obtient pour ensemble de solutions $[-3\,;-1]$.

b. On choisit la forme$(x+2)^2-1$ pour transformer $f(x) > -1$ en $(x+2)^2 - 1 > -1$ ce qui équivaut à $(x+2)^2 > 0$.
Or $(x+2)^2$ est toujours positif ou nul et n'est nul que pour $x = -2$, donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des réels différents de -2.
On peut l'écrire $\mathbb{R} - \{-2\}$ ou $]-\infty; -2[\, \cup\,]-2\,;+\infty[$.

c. On choisit la forme $x^2 + 4x + 3$ pour après simplification se ramener à une inéquation du premier degré :
$f(x) \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \leq x^2 \Leftrightarrow 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{4}$.
L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;-\frac{3}{4}]$.

d. On choisit la forme $x^2 + 4x + 3$ pour pouvoir, après simplification factoriser :
$f(x) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow x(x+4) \leq 0$.
En dressant un tableau de signes de $x(x+4)$, on obtient comme ensemble de solutions $[-4\,;0]$.

Étudier le sens de variation d'une fonction

Exercice 19

1. Si $1 < a < b$

$\downarrow$ On soustrait 1 à chaque membre ; ceci ne change pas le sens des inégalités.

alors $0 < a - 1 < b - 1$

$\downarrow$ On prend les images des nombres strictement positifs $a - 1$ et $b - 1$ par la fonction inverse. Celle-ci est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc elle renverse l'ordre : on change le sens des inégalités.

d'où $\frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1}$

$\downarrow$ On multiplie chaque membre par 4 ; ceci ne change pas le sens des inégalités car 4 est positif.

puis $\frac{4}{a-1} > \frac{4}{b-1}$

2. Si $1 < a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

3. La fonction f renverse l'ordre sur $]1\,;+\infty[$; c'est-à-dire que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

Exercice 20

1. Si $-4 < a < b$

$\downarrow$ On ajoute 4 à chaque membre ; ceci ne change pas le sens des inégalités.

alors $0 < a + 4 < b + 4$

$\downarrow$ On prend les images des nombres positifs $a + 4$ et $b + 4$ par la fonction carré. Celle-ci est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$ donc elle conserve l'ordre : on ne change pas le sens des inégalités.

d'où $(a + 4)^2 < (b + 4)^2$

$\downarrow$ On soustrait 3 à chaque membre ; ceci ne change pas le sens des inégalités.

puis $(a + 4)^2 - 3 < (b + 4)^2 - 3$

2. Si $-4 < a < b$ alors $h(a) < h(b)$.

3. La fonction h conserve l'ordre sur $]-4\,;+\infty[$; c'est-à-dire que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-4\,;+\infty[$.

Exercice 21

Soit $g(x) = 2x^2 + 3x$ pour tout réel x.

1. Pour tous réels a et b,

- si $0 \leq a < b$ alors

  On prend les images des nombres positifs a et b par la fonction carré. Celle-ci est strictement croissante sur $[\ 0\ ; +\infty\ [$ donc elle conserve l'ordre : on ne change pas le sens des inégalités.

  $a^2 < b^2$

  On multiplie chaque membre par 2 ; ceci ne change pas le sens des inégalités car 2 est positif.

  $2a^2 < 2b^2$

- si $0 \leq a < b$ alors

  On multiplie chaque membre par 3 ; ceci ne change pas le sens des inégalités car 3 est positif.

  $3a < 3b$

- si $0 \leq a < b$ alors

  Comme $2a^2 < 2b^2$ et $3a < 3b$ en ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens, on obtient $2a^2 + 3a < 2b^2 + 3b$.

  $2a^2 + 3a < 2a^2 + 3b$

2. Si $0 \leq a < b$ alors $h(a) < h(b)$. On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.