Exercice 99

1. Aire du carré CNPM :
aire(CNMP) = CN^2
Or CD = 5 et DN = x donc CN = 5 – x (en cm) .
Par suite aire(CNMP) $= (5-x)^2$ en cm^2.

Aire du triangle ABM :
ABM est un triangle rectangle en A avec AB = 5 et BM = x. On en déduit que
aire(ABM) $= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{BM} = \frac{5}{2}x$.

Aire du triangle AND :
De même AND est rectangle en A avec
AD = 5 et DN = x donc aire(AND) $= \frac{1}{2}\mathrm{AD}\times\mathrm{DN} = \frac{5}{2}x$.

Méthode

On calcule l'aire d'un triangle par la formule :

$$\textit{aire d'un triangle} = \frac{\textit{base} \times \textit{hauteur}}{2}$$

Pour un triangle rectangle si la base est l'un des côtés de l'angle droit, la hauteur est l'autre côté de l'angle droit.

2. $A(x)$est égale à la différence :
aire(ABCD) – aire(CNMP) –aire(ABM) –- aire(AND).
Donc $A(x) = 25 - (5-x)^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x$.
En développant $(5-x)^2$ (identité remarquable) :
$A(x) = 25 - (25 - 10x + x^2) - 5x$
D'où $A(x) = 25 - 25 + 10x - x^2 = -x^2 + 5x$.

Conseil

Ne pas oublier d'ajouter des parenthèses (en rouge ci-contre) pour que le signe « – » porte bien sur toute la forme développée de $(5-x)^2$.

3. Pour démontrer l'égalité, le plus simple est de développer le membre de droite :

$$-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} = -\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{25}{4}$$
$$= -x^2 + 5x.$$

On constate donc que $-(x-\frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}$ et $A(x)$ sont tous deux égaux à $-x^2 + 5x$, donc
$A(x) = -(x-\frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}$ pour tout x de $[0\,;\,5]$.

Méthode

On pourra revoir les méthodes de l'exercice résolu 2 page 85.

4. a. A est une fonction polynôme de degré 2 car
$A(x) = -x^2 + 5x$ c'est-à-dire
$A(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 5$, $c = 0$.
On sait qu'elle est :
— soit strictement décroissante puis strictement croissante
— soit strictement croissante puis strictement décroissante.

Méthode

Pour trouver le sens de variation de A, on peut aussi observer que a est négatif et en déduire que A est strictement croissante puis strictement décroissante.

Or $A(x) = -(x-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{4}$, avec $(x-\frac{5}{2})^2$ qui est toujours positif ou nul donc $-(x-\frac{5}{2})^2$ qui est toujours négatif ou nul.
Ainsi $A(x) \leq \frac{25}{4}$ pour tout x de $[0 ; 5]$.
De plus $A(x) = \frac{25}{4}$ pour $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 0$ soit $x = \frac{5}{2}$.
On en déduit que A atteint son maximum $\frac{25}{4}$ en $\frac{5}{2}$.

C'est donc que A est strictement croissante puis strictement décroissante.

D'où son tableau de variations :

x	0	$\frac{5}{2}$	5
$A(x)$	0 ↗	$\frac{25}{4}$	↘ 0

4. b. Avec $x = \text{BM}$, $x = 1{,}4$ correspond à la figure 1,
$x = 2{,}9$ à la figure 2, et $x = 4{,}3$ à la figure 3.

Solution 1 : par le calcul
$A(1{,}4) = 5{,}04$; $A(2{,}9) = 6{,}09$ et $A(4{,}3) = 3{,}01$.
On a donc $A(4{,}3) < A(1{,}4) < A(2{,}9)$ soit dans l'ordre croissant de leurs aires : figure 3 ; figure 1 ; figure 2.

Solution 2 : sans calcul
La parabole représentant la fonction A a pour axe de symétrie $x = 2{,}5$. Donc $A(1{,}4) = A(3{,}6)$.
Dans $[2{,}5; 5]$, on a $2{,}9 < 3{,}6 < 4{,}3$ et A est strictement décroissante donc $A(2{,}9) > A(3{,}6) > A(4{,}3)$.
Dans l'ordre croissant de leurs aires, on retrouve : figure 3, figure 1, figure 2 .

5. $A(x) = 5{,}25 \Leftrightarrow -(x-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{4} = 5{,}25$
$\Leftrightarrow -(x-\frac{5}{2})^2 = 0.$
La solution est donc $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$.
Ceci correspond au point M placé au milieu du segment [BC].

Méthode

Pour montrer que $\frac{25}{4}$ est le maximum de A il faut :
— montrer que pour tout x, $A(x) \leq \frac{25}{4}$.
— trouver un réel x qui a pour image $\frac{25}{4}$.

Conseil

Contrôler ces résultats en traçant la courbe représentative de A sur la calculatrice.