# Fonction carré

### Exercice 1

Les images par la fonction carré des nombres : $-6\,;\frac{2}{7}\,;\frac{3}{4}\,;\ 10^{-5}\,;10^{3}$
sont, dans l'ordre : $36\,;\frac{4}{49};\ \frac{9}{4}\ ;\ 10^{-10}\ ;\ 10^{6}$.

### Exercice 2

**a.** Les solutions de l'équation $x^2 = 16$ sont 4 et – 4.

**b.** Les solutions de l'équation $x^2 = 5$ sont $\sqrt{5}$ et – $\sqrt{5}$ .

**c.** L'équation $x^2 = -2$ n'a pas de solution (car $x^2$ est toujours positif ou nul).

**d.** Les solutions de l'équation $x^2 = 10^{16}$ sont $10^8$ et $-10^8$.

### Exercice 3

**a.** $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc $\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

**b.** $4 - x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = -2$. Cette équation n'a pas de solution.

**c.** $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$. Les solutions sont 1 et $-1$.

**d.** $25x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{25}$. Les solutions sont $\frac{3}{5} = 0{,}6$ et $-\frac{3}{5} = -0{,}6$.

### Exercice 4

**a.** $(x+1)^2 = 16 \Leftrightarrow x + 1 = 4$ ou $x + 1 = -4 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -5$.
Les solutions sont 3 et $-5$.

**b.** $(3x-2)^2 = 25 \Leftrightarrow 3x - 2 = 5$ ou $3x - 2 = -5 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ ou $x = -1$.
Les solutions sont $\frac{7}{3}$ et $-1$.

**c.** $(2x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x$ ou $2x - 1 = -x \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{1}{3}$.
Les solutions sont 1 et $\frac{1}{3}$.

**d.** $(x-1)^2 = (3x+4)^2 \Leftrightarrow x - 1 = 3x + 4$ ou $x - 1 = -(3x+4) \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{3}{4}$.
Les solutions sont $-\frac{5}{2}$ et $-\frac{3}{4}$.

### Exercice 5

**Méthode** : on peut raisonner en utilisant le sens de variation de la fonction carré ou en s'aidant d'un dessin.

**a.** On a $0{,}6 < 2{,}35$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty[$ sur lequel la fonction carré est strictement croissante. Elle conserve l'ordre : $0{,}6^2 < 2{,}35^2$.
**b.** On sait que $-102{,}6 < -60$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ sur lequel la fonction carré est strictement décroissante.
Elle renverse donc l'ordre : $(-102{,}6)^2 > (-60)^2$.

**c.** On sait que $-25 < 36$ mais on ne peut rien en déduire sur leurs images par la fonction carré car sur l'intervalle $[-25\,;36]$, cette fonction change de sens de variation en 0.
Mais on sait que $(-25)^2 = 25^2$.
Comme $25 < 36$ on peut alors déduire que $25^2 < 36^2$ donc aussi que $(-25)^2 < 36^2$.

**d.** On a $\frac{7}{8} < 1 < \frac{8}{7}$ donc $\frac{7}{8} < \frac{8}{7}$ et par conséquent $\left(\frac{7}{8}\right)^2 < \left(\frac{8}{7}\right)^2$ puisque la fonction carré est strictement croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

## Exercice 6

**Méthode** : on s'aide d'un dessin.

**a.** $x^2 \leq 49$ équivaut à $-7 \leq x \leq 7$. Ceci revient à dire que $x \in [\,-7\,;7\,]$.
**b.** $x^2 > 1$ équivaut à $x > 1$ ou $x < -1$. Ceci peut encore s'écrire $x \in ]-\infty;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$.

**c.** $x^2 < 3$ équivaut à $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ ou encore à $x \in ]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,[$.

**d.** $x^2 \geq -8$ est vrai pour tout $x$ réel car $x^2$ est toujours positif ou nul, donc supérieur ou égal à 0, et a fortiori supérieur ou égal à $-8$ .

## Exercice 7

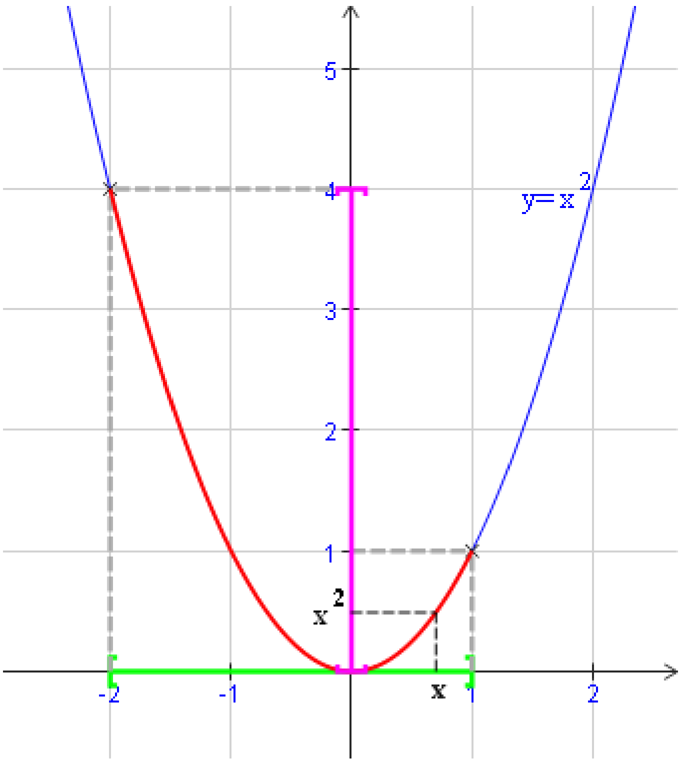
**a.** La fonction carré est strictement croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$. On en déduit que :
si $2 \leq x \leq 4$, alors $2^2 \leq x^2 \leq 4^2$ c'est-à-dire $4 \leq x^2 \leq 16$.

**b.** La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$. On en déduit que :
si $-3 \leq x \leq -1$ alors $(-3)^2 \geq x^2 \geq (-1)^2$ c'est-à-dire $9 \geq x^2 \geq 1$.

**c.** La fonction carré est strictement croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$. On en déduit que :
si $0 < x < 6$ alors $0^2 < x^2 < 6^2$ c'est-à-dire $0 < x^2 < 36$.

**d.** La fonction carré ne garde pas toujours le même sens de variation sur $[-2\,;\,1]$.
On peut s'aider du dessin ci-dessous : *Voir animation GeoGebra*

si $-2 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^2 \leq 4$ . *Voir animation Geoplan*



**Exercice 8**

**a.** Si $x \in [0\,;4]$, c'est-à-dire si $0 \leq x \leq 4$, alors $0 \leq x^2 \leq 16$.

**b.** Si $x \in ]-3\,;\,-2[$, c'est-à-dire $-3 < x < -2$, alors $9 > x^2 > 4$.

**c.** Si $x \in [-2\,;2]$, c'est-à-dire $-2 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq x^2 \leq 4$.

**d.** Si $x \in ]-1\,;5]$, c'est-à-dire $-1 < x \leq 5$ alors $0 \leq x^2 \leq 25$.

**Exercice 9**

Soit $d$ le diamètre du disque et $r$ son rayon. On a donc $\mathcal{A} = \pi \times r^2$.
Comme $16 \leq d \leq 17$, en divisant par 2 on a $8 \leq r \leq 8{,}5$.
Le fonction carré étant strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on a donc $8^2 \leq r^2 \leq 8{,}5^2$
c'est-à-dire $64 \leq r^2 \leq 72{,}25$.
En multipliant par $\pi$, on obtient : $64\pi \leq \mathcal{A} \leq 72{,}25\,\pi$.
Or $64\pi \approx 201{,}06$ et $72{,}25\,\pi \approx 226{,}98$.
On en déduit que $201 \leq \mathcal{A} \leq 227$ (en mm$^2$).

## Fonction inverse

**Exercice 10**

Les images par la fonction inverse des nombres : $-3\,;\,\frac{2}{7}\,;\,\frac{3}{4}\,;\,10^{-5}\,;10^3\,;\,-0{,}01$ sont, dans l'ordre, $-\frac{1}{3};\,\frac{7}{2};\,\frac{4}{3};\,10^5;10^{-3};-100$.

**Exercice 11**

**a.** L'équation $\frac{1}{x} = 20$ a pour solution $\frac{1}{20} = 0{,}05$.

**b.** L'équation $\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ a pour solution $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

**c.** L'équation $\frac{1}{x} = 10^{-2}$ a pour solution $\frac{1}{10^{-2}} = 10^2 = 100$.

**d.** L'équation $\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ a pour solution 4.

**Exercice 12**

**a.** $\frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

**b.** $\frac{1}{x-5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-5 = 2 \Leftrightarrow x = 7$.

**c.** $\frac{1}{2x+4} = 0{,}1 \Leftrightarrow 2x+4 = \frac{1}{0{,}1} \Leftrightarrow 2x+4 = 10 \Leftrightarrow x = 3$.

**d.** $\frac{1}{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{18}$.

**Exercice 13**

**Méthode** : on peut utiliser le sens de variation de la fonction inverse ou s'aider d'un dessin.

**a.** La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ qui contient 7,6 et 8.
De $7{,}6 < 8$ on déduit que $\frac{1}{7{,}6} > \frac{1}{8}$.

**b.** De même, de $0{,}1 > 0{,}07$ on peut déduire que $\frac{1}{0{,}1} < \frac{1}{0{,}07}$.

**c.** Comme $-\frac{1}{5{,}2} < 0 < \frac{1}{9.3}$, on a $-\frac{1}{5{,}2} < \frac{1}{9.3}$.

**d.** On peut commencer par comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{1{,}4}$ : de $1{,}4 < 3$ on déduit que $\frac{1}{1{,}4} > \frac{1}{3}$.
En multipliant par $-1$, négatif, on change le sens des inégalités ce qui donne $-\frac{1}{1{,}4} < -\frac{1}{3}$.

## Exercice 14

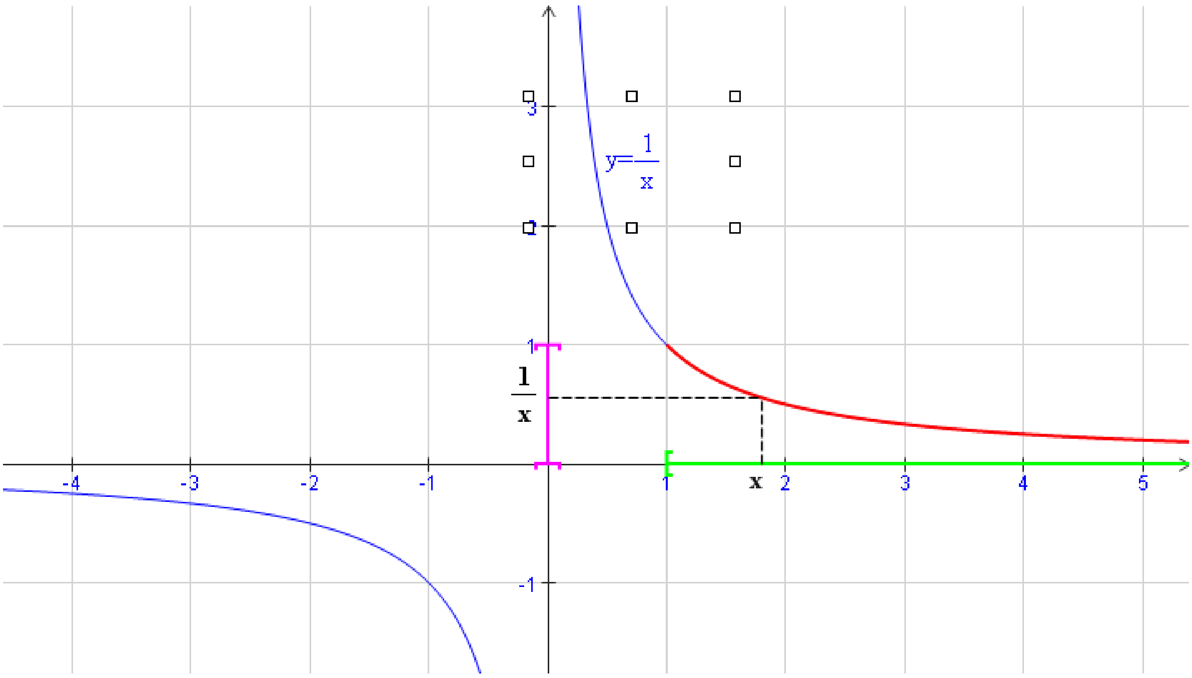
**Méthode** : on peut utiliser le sens de variation de la fonction inverse ou s'aider d'un dessin.

**a.** Si $2 \leq x \leq 3$ alors $\frac{1}{2} \geq x \geq \frac{1}{3}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty[$.

**b.** Si $-5 \leq x \leq -1$ alors $-\frac{1}{5} \geq \frac{1}{x} \geq -1$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

**c.** Si $0 < x < \frac{1}{6}$ alors $\frac{1}{x} > 6$

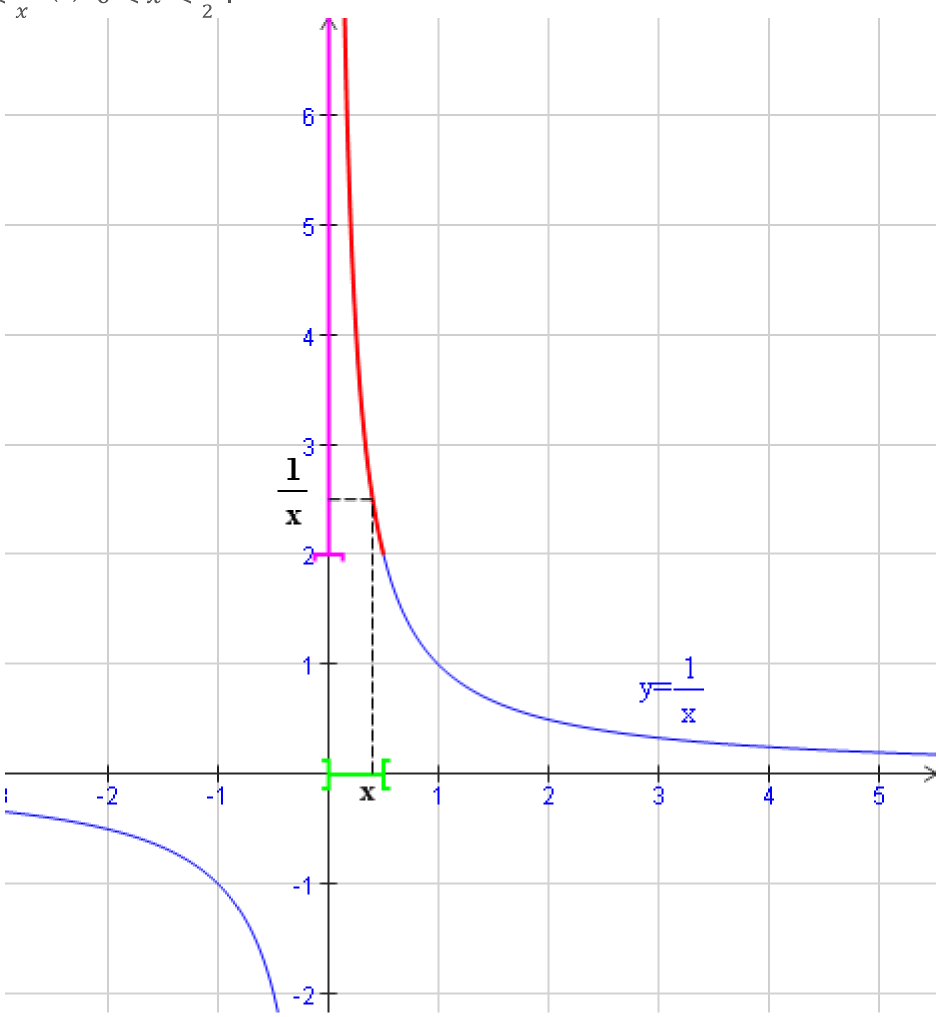
**d.** Si $x \geq 1$ alors $\frac{1}{x} \leq 1$ ; on peut même préciser que $0 < \frac{1}{x} \leq 1$.



## Exercice 15

**Méthode** : on s'aide d'un dessin pour résoudre ces équations.

**a.** $2 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$ .




**b.** $\frac{1}{x} \leq -1 \Leftrightarrow -1 < x < 0.$

**c.** $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow x > 6.$

**d.** $\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x < 0$ OU $x > 1$ (ce que l'on peut encore écrire $x \in ]-\infty\,;\,0\,[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ ).

## Exercice 16

On sait que $U = RI$ donc $R = \frac{U}{I} = \frac{220}{I}$.

De $9{,}9 \leq I \leq 10{,}1$ on déduit que $\frac{1}{9{,}9} \geq \frac{1}{I} \geq \frac{1}{10{,}1}$.

En multipliant par 220, positif, on obtient : $\frac{220}{9{,}9} \geq \frac{220}{I} \geq \frac{220}{10{,}1}$

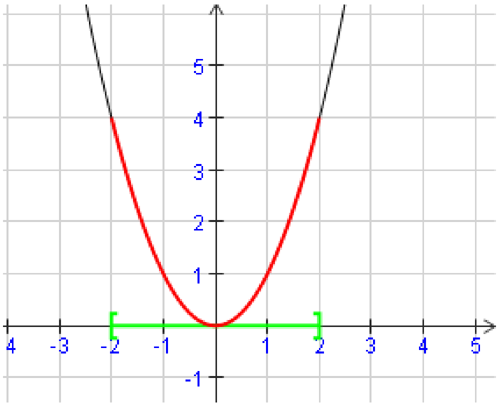
Donc $\frac{220}{9{,}9} \geq R \geq \frac{220}{10{,}1}$ ou encore $\frac{220}{10{,}1} \leq R \leq \frac{220}{9{,}9}$.

Comme $\frac{220}{9{,}9} \approx 22{,}22$ et $\frac{220}{10{,}1} \approx 21{,}78$, on en déduit que $21{,}7 \leq R \leq 22{,}3$.

## Un peu de logique

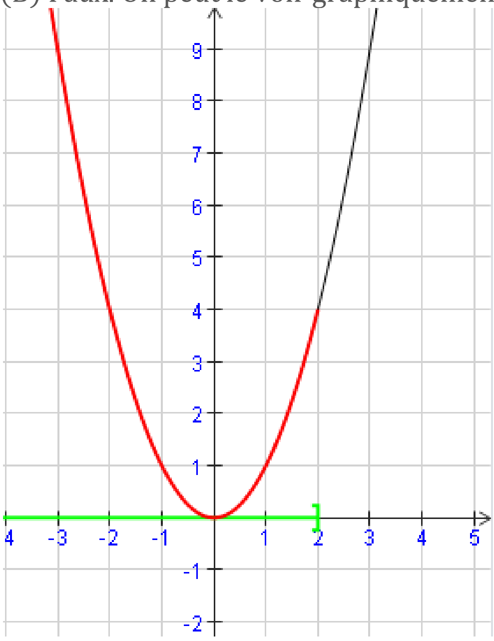
### Exercice 17 Vrai ou Faux ?

(A) Vrai.
On peut le voir graphiquement : si $x^2 \leq 4$ alors $-2 \leq x \leq 2$. Donc on est sûr que $x \leq 2$.




On peut aussi le démontrer par contraposition:
« $x^2 \leq 4$ alors $x \leq 2$ » est « si $x > 2$ alors $x^2 > 4$ ».
Cette contraposée est vraie du fait de la stricte croissance de la fonction carré sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
Donc la proposition « si $x^2 \leq 4$ alors $x \leq 2$ » est elle aussi vraie.

(B) Faux. On peut le voir graphiquement :




Pour le démontrer, il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = -3$,
l'affirmation « $x < 2$ » est vraie mais l'affirmation « $x^2 < 4$ » est fausse puisque $x^2 = 9$.

(C) Faux.
On peut le voir graphiquement.
On peut le démontrer ne donnant un contre-exemple : pour $x = 10$, l'affirmation « $x > 2$ » est vraie mais l'affirmation « $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ » est fausse car $\frac{1}{x} = 0{,}1$ et $\frac{1}{2} = 0{,}5$.
On peut aussi plus rapidement démontrer que si $x > 2$ alors on a $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
(et donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ est faux) par stricte décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$.

(D) Vrai. On peut le démontrer par contraposition car si $x > 3$, alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

## Fonctions polynômes de degré 2

**Exercice 18**

$C_1$ a pour équation $y = -x^2$ ; $C_2$ a pour équation $y = 2x^2$ ; $C_3$ a pour équation $y = 0{,}5x^2$.

**Exercice 19**

**a.** $f(x) = -x^2 + 4x - 1 = ax^2 + bx + c$ pour $a = -1$, $b = 4$, $c = -1$.

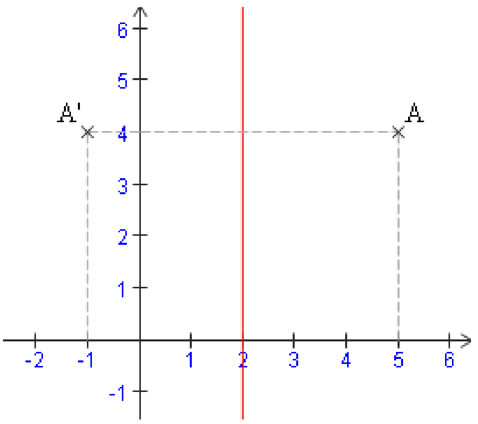
**b.** $f(x) = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 4, b = -12, c = 9$.

**c.** $f(x) = 4x(2 - x) = -4x^2 + 8x = ax^2 + bx + c$ avec $a = -4$, $b = 8$, $c = 0$.

**d.** $f(x) = 3x^2 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = 0$, $c = 0$.

**Exercice 20**

**1.** Comme $f$ est une fonction polynôme de degré 2, $C_f$ est une parabole.
De $f(5) = 4$, on déduit que $C_f$ passe par le point A (5 ; 4).
Comme $f$ admet un extremum en 2, l'axe de symétrie de la parabole est la droite $d$ d'équation $x = 2$.
**2.** On en déduit que le symétrique A' du point A par rapport à la droite $d$ appartient lui aussi à la courbe. Ses coordonnées étant $(-1\,;\ 4)$ on en déduit que $f(-1) = 4$.
Le réel cherché est donc $-1$.




**Exercice 21**

**1.** La fonction $h$ est une fonction polynôme de degré 2 donc $C_h$ est une parabole.

**2.** $h(2) = h(5)$ donc les points d'abscisses 2 et 5 de $C_h$ ont la même ordonnée et sont donc symétriques par rapport à l'axe de symétrie de la parabole.
L'axe de symétrie de la parabole est donc la droite d'équation $x = \frac{2+5}{2}$ soit $x = 3{,}5$.

**Exercice 22**

**1.** $C_f$ est une parabole.

**2.** $f(0) = 5$ et $f(6) = 5$. Donc A et B ont la même ordonnée 5.

**3.** A et B sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole. Cet axe de symétrie est donc la droite d'équation $x = 3$.

**4.** Le sommet S de $C_f$ a pour abscisse 3 puisqu'il appartient à l'axe de symétrie. Son ordonnée est $f(3) = -4$. Donc S a pour coordonnées $(3\ ;\ -4)$.

**5.** Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $-4$ | ↗ |

### Exercice 23

**1.** $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $8 - x = 0$.
Les solutions sont 2 et 8.

**2.** Les points d'intersection de l'axe des abscisses avec la courbe $C_f$ ont pour coordonnées $(2\ ;\ 0)$ et $(8\ ;\ 0)$.

**3.** L'axe de symétrie de $C_f$ est donc la droite d'équation $x = 5$.
Le sommet de $C_f$ a pour abscisse 5 et pour ordonnée $f(5) = 9$. Il s'agit donc du point S $(5\ ;9)$.

**4.** Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | $9$ | ↘ |

### Exercice 24

**1.** Pour tout réel, $f(x) = 5 - 2(x^2 + 2x + 1) = 5 - 2x^2 - 4x - 2 = -2x^2 - 4x + 3$.
On a donc bien $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -2, b = -4, c = 3$.
Par conséquent $f$ est une fonction polynôme de degré 2.
**2.** Pour tout réel $x$, $(x+1)^2$ est positif ou nul, donc $2(x+1)^2$ aussi.
De ce fait $f(x) \leq 5$ pour tout $x$.

**3.** On sait que $f(x) \leq 5$ pour tout $x$. De plus $f(-1) = 5$.
On en déduit que $f$ admet pour maximum 5 et que ce maximum est atteint en $-1$.

**4.** Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | $5$ | ↘ |

## Fonctions homographiques

### Exercice 25

On considère les fonctions $f$ définies de la façon suivante :
**a.** $f(x) = -\frac{2}{x+3} = \frac{-2}{x+3} = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 0, b = -2, c = 1, d = 3$.
Donc $f$ est une fonction homographique.

Elle est définie en tout réel $x$ tel que $x + 3 \neq 0$, donc en tout réel $x \neq -3$.
Autrement dit son ensemble de définition est $]-\infty;\ -3\,[\ \cup\ ]-3\ ;\ +\infty\,[$ encore noté $\mathbb{R} - \{-3\}$.

On peut contrôler graphiquement à la calculatrice qu'il n'y a pas de point d'abscisse $-3$ sur la courbe représentative de $f$.

**b.** $f(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x} = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 2$, $b = -1, c = 1, d = 0$.
Donc $f$ est une fonction homographique.
Son ensemble de définition est $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ encore noté $\mathbb{R} - \{0\}$, ou $\mathbb{R}^*$.
On peut contrôler graphiquement à la calculatrice qu'il n'y a pas de point d'abscisse 0 sur la courbe représentant $f$ c'est-à-dire que celle-ci ne coupe pas l'axe des ordonnées.

**c.** $f(x) = \frac{2x}{x-1} + 3 = \frac{2x}{x-1} + \frac{3(x-1)}{x-1} = \frac{2x+3x-3}{x-1} = \frac{5x-3}{x-1} = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 5$, $b = -3, c = 1, d = -1$.
Donc $f$ est une fonction homographique.

Elle est définie en tout réel $x$ tel que $x - 1 \neq 0$, donc en tout réel $x$ différent de 1.
Autrement dit son ensemble de définition est $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$ encore noté $\mathbb{R} - \{1\}$.

On peut contrôler graphiquement à la calculatrice qu'il n'y a pas de point d'abscisse 1 sur la courbe représentative de $f$.

**d.** $f(x) = \frac{3}{4-x} - 2 = \frac{3}{4-x} - \frac{2(4-x)}{4-x} = \frac{3}{4-x} - \frac{8-2x}{4-x} = \frac{3-(8-2x)}{4-x} = \frac{2x-5}{4-x} = \frac{2x-5}{-x+4}$
Ainsi $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 2$, $b = -5, c = -1, d = 4$ et $f$ est une fonction homographique.

Elle est définie en tout réel $x$ tel que $-x + 4 \neq 0$, donc en tout réel $x \neq 4$.
Autrement dit son ensemble de définition est $]-\infty; 4[ \cup ]4; +\infty[$ encore noté $\mathbb{R} - \{4\}$.

On peut contrôler graphiquement à la calculatrice qu'il n'y a pas de point d'abscisse 4 sur la courbe représentative de $f$.

## Exercice 26

**1.** $x + 3$ ne s'annule qu'en $-3$ donc $g$ est définie sur $]-\infty; -3[ \cup ]-3; +\infty[$.

**2.** Pour $x \neq -3$, $\frac{2x-4}{x+3} = 5 \iff 2x - 4 = 5(x+3) \iff x = -\frac{19}{3}$.

La solution est $-\frac{19}{3}$ (qui est bien différente de $-3$).

## Exercice 27

**a.** On doit avoir $2x + 1 \neq 0 \iff x \neq -\frac{1}{2}$.

Pour $x \neq -\frac{1}{2}$ : $\frac{3-x}{2x+1} = 0 \iff 3 - x = 0 \iff x = 3$.

L'équation a une seule solution : 3.

**b.** Il faut que $5x - 3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \frac{3}{5}$.

Pour $x \neq \frac{3}{5}$ : $\frac{2}{5x-3} = 1 \iff 2 = 5x - 3 \iff x = 1$.

La solution de cette équation est 1.

**c.** On doit avoir $x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2$.

Pour $x \neq 2$ : $\frac{2x+1}{x-2} = 4 \iff 2x + 1 = 4(x-2) \iff x = \frac{9}{2}$.

La solution de cette équation est $\frac{9}{2}$.