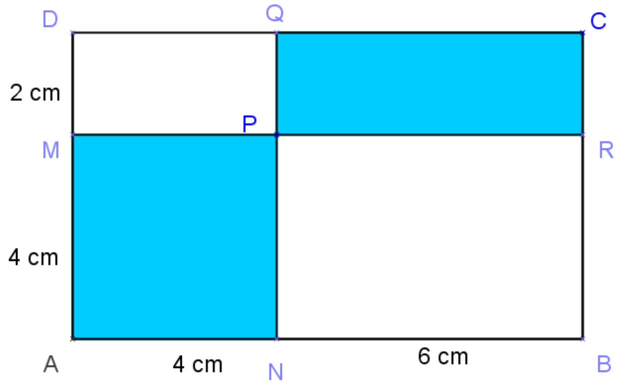
Exercice 132

1.a. Pour $x = 4$, on a $\mathrm{AM} = \mathrm{AN} = 4$ cm.

Figure réduite :



Rappel
L'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle se calcule par la formule $\mathcal{A} =$ longueur $\times$ largeur

b. L'aire de AMPN est $4 \times 4\ \mathrm{cm}^2 = 16\ \mathrm{cm}^2$.

L'aire du rectangle PQCR est $2 \times 6\ \mathrm{cm}^2 = 12\ \mathrm{cm}^2$

En ajoutant ces deux aires, on obtient

$A(4) = 28\ \mathrm{cm}^2$.

Exercice 132

2. Pour tout x de $[0;6]$, on a $\mathrm{AM} = \mathrm{AN} = x$ donc

l'aire de AMPN est donnée par : $\mathrm{aire(AMPN)} = x^2$.

D'autre part ,

$$\mathrm{CQ} = \mathrm{PR} = 10 - x \text{ et } \mathrm{QP} = \mathrm{CR} = 6 - x.$$

Donc PQCR a pour aire :

$$\mathrm{aire(PQCR)} = (10 - x) \times (6 - x)$$

Par conséquent en ajoutant ces deux aires :

$$A(x) = x^2 + (10 - x)(6 - x).$$

.

Exercice 132

3. a. On développe l'expression de $A(x)$ trouvée à la question précédente :

$$x^2 + (10 - x)(6 - x) = x^2 + 60 - 10x - 6x + x^2$$
$$= 2x^2 - 16x + 60$$

On en déduit que

$A(x) = 2x^2 - 16x + 60$ pour tout x de $[0; 6]$.

b. Pour tout x de $[0; 6]$on a :

$$2(x - 4)^2 + 28 = 2(x^2 - 8x + 16) + 28$$
$$= 2x^2 - 16x + 32 + 28$$
$$= 2x^2 - 16x + 60$$

On en déduit que

$A(x) = 2(x - 4)^2 + 28$ pour tout x de $[0; 6]$.

Méthode

Pour démontrer une « égalité pour tout x » : on transforme un membre pour obtenir l'autre ou on transforme les deux membres pour trouver une même 3e expression.

méthode décrite dans l'exercice 2 page 85

Conseil

Il faut bien observer les expressions avant de transformer.
On sait toujours développer mais pas toujours factoriser une expression ou une partie de celle-ci ...
Dans ces deux questions, on est donc parti à chaque fois de l'expression qui n'est pas développée pour retrouver l'expression développée.

Exercice 132

4. Un carré est toujours positif ou nul donc $(x-\ 4)^2$ est toujours positif ou nul et en multipliant par 2, positif, on est sûr que $2(x-4)^2$ reste toujours positif ou nul.
De $A(x) =\ 2(x-4)^2 + 28$ on déduit donc que $A(x)$ est toujours supérieure ou égale à 28 cm².

De plus $A(x) =\ 28$ si et seulement si $2(x-4)^2 = 0$ c'est-à-dire pour $x - 4 = 0$ ou encore $x = 4$.

Ceci signifie que pour tout x de $[0; 6]$, $A(x) \geq A(28)$.
Autrement dit A admet 28 pour minimum et atteint ce minimum pour $x = 4$.
L'aire minimale est donc 28 cm².
Elle est atteinte lorsque le point M est situé à 4 cm du point A (figure de la question 1.a.).

Méthode

Pour démontrer que A admet pour minimum k sur $[0; 6]$ et l'atteint en une valeur a, il faut montrer que $A(x) \geq A(a)$ pour tout x de $[0; 6]$
En pratique on montre souvent ceci en deux étapes :
- Étape 1 : montrer que pour tout x de $[0; 6]$, $A(\mathrm{x}) \geq k$.
- Étape 2 : trouver une valeur a telle que $A(a) = k$.

Conseil

Bien comprendre ce raisonnement.
Déjà abordé au chapitre 2, il sera réutilisé aux chapitres 4 et 5.

Exercice 132

5. Différentes stratégies sont possibles.

Avec une table de valeurs
Sur une calculatrice ou un tableur, on observe une table de valeurs de la fonction A en diminuant éventuellement le pas si nécessaire. On obtient ainsi a priori des valeurs approchées des solutions.

Avec un graphique

- Sur une calculatrice : on fait afficher la courbe représentant la fonction A et on utilise l'outil Trace pour repérer les points d'ordonnée 30 (environ) sur la courbe et obtenir leurs abscisses.
- Sur GeoGebra : on représente la courbe de la fonction A et la droite d'équation $y = 30$. On crée le point d'intersection des deux courbes et on lit ses coordonnées dans la fenêtre
Algèbre.

On obtient ainsi a priori des valeurs approchées des solutions.

Algébriquement avec un logiciel de calcul formel
On peut résoudre algébriquement en transformant l'équation $A(x) = 30$ en $A(x) - 30 = 0$ et en factorisant $A(x) - 30$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
On obtient alors des valeurs exactes des solutions.

Remarque : avec un logiciel, on peut prendre n'importe quelle forme de $A(x)$. A la main, on devrait choisir la forme la plus appropriée, ici celle de la question **3b.**, pour pouvoir factoriser :

$$2(x-4)^2 + 28 = 30 \iff (x-4)^2 - 1 = 0$$
$$\iff (x-4-1)(x-4+1) = 0$$
$$\iff x = 5 \text{ ou } x = 3$$

Conseil
Savoir lire graphiquement des valeurs approchées des solutions d'une équation grâce à la calculatrice graphique, permet de contrôler les résultats que l'on obtient par le calcul même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé !