Sens de variation

Exercice 1

Quand la longueur AM augmente, l'aire du triangle AMD augmente. La fonction qui à AM associe l'aire de d_1 est donc une fonction strictement croissante. C'est donc elle qui est représentée par d_1.

Quand M est en B, l'aire du triangle BMC est nulle. On en déduit que c'est d_3 qui représente l'aire de BMC en fonction de AM.

Par conséquent d_2 représente l'aire de CMD en fonction de AM.

Exercice 2

x	-5		-3		1		2
$f(x)$	4	↘	-4	↗	4	↘	2

Exercice 3

1. g est définie sur l'intervalle $]-\infty\,;7]$.

2. g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;3]$, strictement croissante sur $[3\,;5]$, strictement décroissante sur $[5\,;7]$.

3. Comparaison :

a. -2 et 0 appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;3]$ sur lequel g renverse l'ordre.
De $-2<0$ on déduit que $g(-2)>g(0)$.

b. 0 et 4 ne sont pas dans un intervalle où g est monotone. On ne peut donc pas comparer $g(0)$ et $g(4)$.

c. π et 4 appartiennent à l'intervalle $[3\,;5]$ sur lequel g conserve l'ordre.
De $\pi<4$ on peut déduire que $g(\pi)<g(4)$.

d. 5 et 6 appartiennent à l'intervalle $[5\,;7]$ sur lequel g renverse l'ordre.
De $5<6$ on peut déduire que $g(5)>g(6)$.

Exercice 4

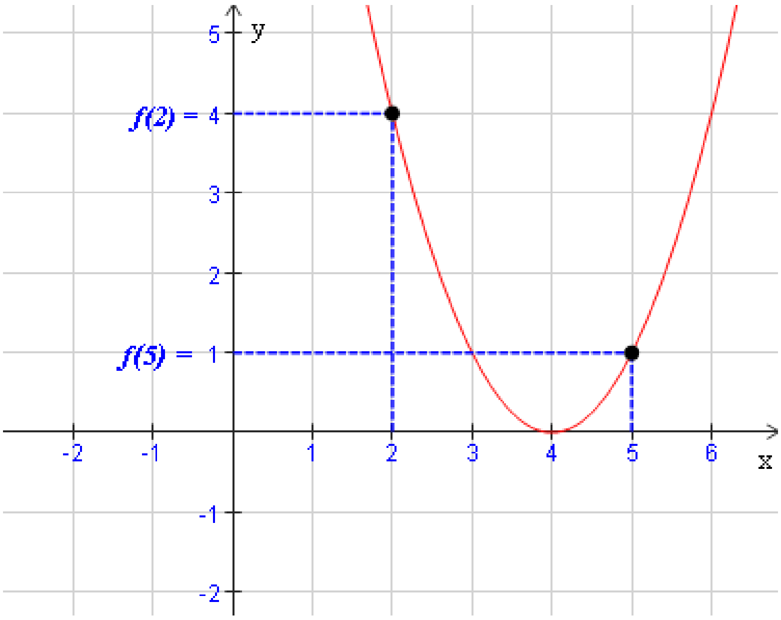
a. Le maximum de g sur $[3\,;7]$ est 2 ; il est atteint en 5.

b. Le minimum de g sur $]-\infty\,;7]$ est -3 ; il est atteint en 3.

Exercice 5

(A) Si f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors $f(2) > f(5)$: **VRAI**
En effet $2 < 5$ et f renverse l'ordre sur $\mathbb{R}$.

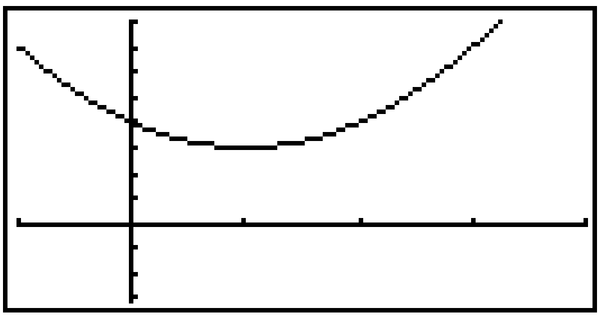
(B) Si $f(2) > f(5)$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$: **FAUX**
Il est possible que f le soit, mais ce n'est pas sûr !
Donnons un contre exemple :



(C) Si f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et si $f(-2) = 1$
alors les réels x tels que $f(x) > 1$ sont ceux de l'intervalle $]-\infty\,;\,-2]$: **VRAI**
En effet comme f renverse l'ordre sur $\mathbb{R}$:
• pour $x < -2$, on a $f(x) > f(-2)$ c'est-à-dire $f(x) > 1$
• pour $x > -2$, on a $f(x) < f(-2)$ soit $f(x) < 1$.
On peut s'appuyer sur un graphique pour visualiser ces inégalités.

Exercice 6

Pour x compris entre – 1 et 4 on obtient l'écran ci-contre.



On constate que f semble changer de variation en 1.

Calculons $f(0), f(1) et\ f(3)$:

$$f(0) = 4\ ;\ f(1) = 3\ ; f(3) = 7\ .$$

Donc f ne conserve pas l'ordre sur $\mathbb{R}$
puisque $0 < 1$ mais $f(0) > f(1)$
et f ne renverse pas l'ordre sur $\mathbb{R}$ puisque $1 < 3$ mais $f(1) < f(3)$.

Par conséquent, f n'est pas strictement monotone (c'est-à-dire strictement croissante ou strictement décroissante) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - (3+x)^2$.

1. Pour tout x réel, $(3+x)^2$ est positif ou nul, donc en enlevant un nombre positif ou nul à 4, on obtient bien un nombre inférieur ou égal à 4 : $f(x) \leq 4$.

2. $f(-3) = 4 - 0^2 = 4$.

3. On a donc montré que pour tout x réel, $f(x) \leq f(-3)$.
Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est donc $f(-3)$ soit 4. Il est atteint en -3.

Exercice 8

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 2(t-3)^2 - 6$.

1. Pour tout t réel, $2(t-3)^2$ est positif ou nul donc $h(t) \geq -6$.

2. De plus $h(3) = -6$. On en déduit que pour tout t réel, $h(t) \geq h(3)$.
Le minimum de h sur $\mathbb{R}$ est donc -6 et il est atteint en 3.

Fonction affines

Exercice 9

a. $x \mapsto -2x + 5$: $a = -2$; $b = 5$.

La fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. $x \mapsto x - 3$: $a = 1$; $b = -3$.

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. $x \mapsto -\frac{1}{2}x$: $a = -\frac{1}{2}$; $b = 0$.

La fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. $x \mapsto -x + 6$: $a = -1$; $b = 6$.

La fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

e. $x \mapsto -4$: $a = 0$; $b = -4$.

La fonction est constante sur $\mathbb{R}$.

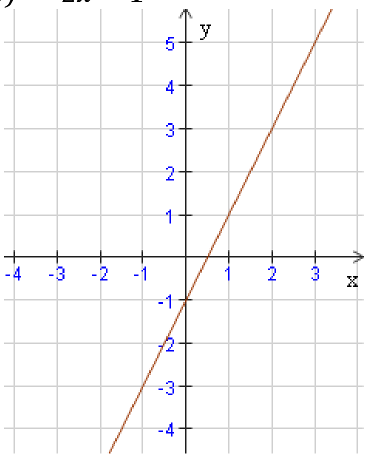
f. $x \mapsto \frac{x}{3} + \sqrt{3}$: $a = \frac{1}{3}$; $b = \sqrt{3}$.

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

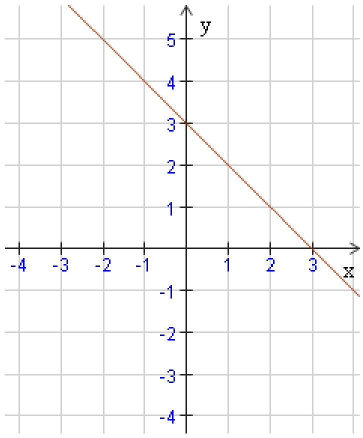
Exercice 10

Ces fonctions sont toutes des fonctions affines. Pour tracer les droites qui les représentent, on utilise l'une des deux méthodes de l'exercice résolu 7 page 63.

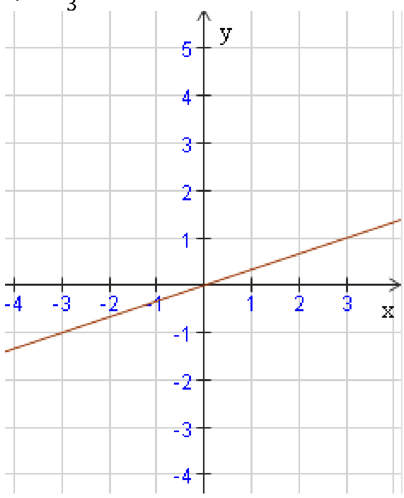
a. $f(x) = 2x - 1$



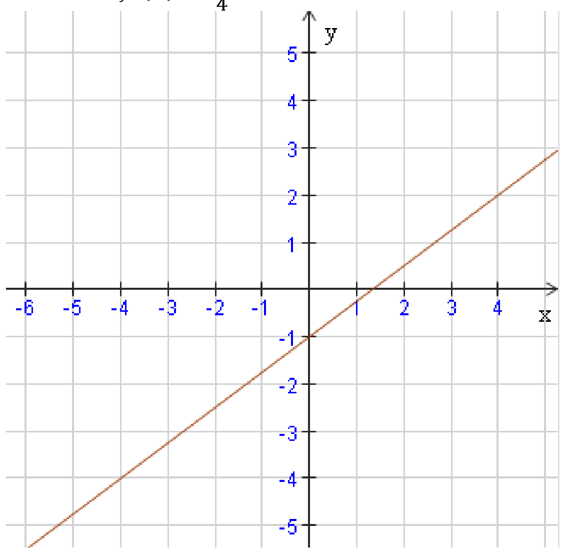
b. $f(x) = -x + 3$



c. $f(x) = \frac{1}{3}x$



d. $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$



Exercice 11

On détermine le coefficient directeur a en considérant deux points à coordonnées entières sur chaque droite et on lit l'ordonnée à l'origine b.

d_1 : $a = -3$; $b = 2$ donc d_1 a pour équation $y = -3x + 2$.

d_2 a pour équation $y = 1$.

d_3 : $a = 1$; $b = -1$ donc d_2 a pour équation $y = x - 1$.

d_4 : $a = 3$; $b = 0$ donc d_3 a pour équation $y = 3x$.

d_5 : $a = -\frac{2}{5}$ (on utilise les points de coordonnées (0 ; 2) et (5 ; 0)).

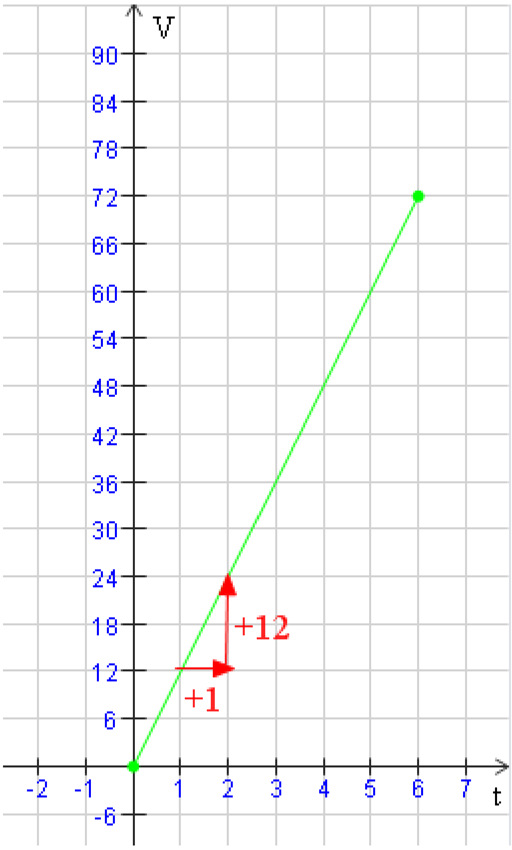
$b = 2$ donc d_4 a pour équation $y = -\frac{2}{5}x + 2$.

Exercice 12

En prenant une douche pendant une durée t (en min), on consomme une quantité d'eau V (en L). On suppose que le débit de cette douche est 12 L par min.

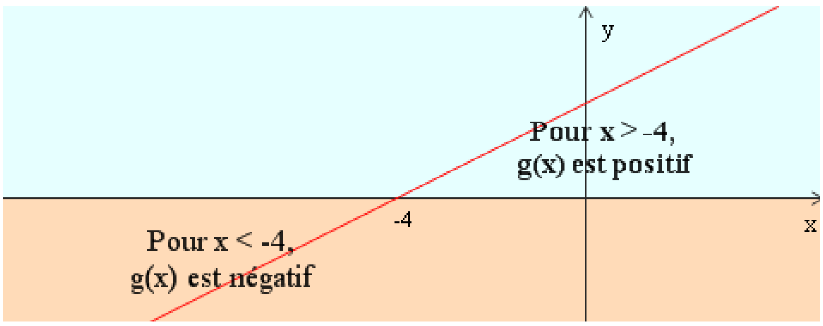
1. Avec t en minutes et V en litres, on a $V = 12\,t$.
On peut considérer la fonction v qui à t associe $v(t) = 12\,t$.

2. La fonction v est une fonction linéaire, représentée par une droite passant par l'origine du repère.
On trace cette droite en considérant un autre point que l'origine du repère comme le point A $(1\,,\,v(1))$ soit A $(1, 12)$ ou en utilisant le fait que cette droite a pour coefficient directeur 12.
Le débit en L par min est le coefficient directeur de la droite ; quand t augmente de 1 min, $v(t)$ augmente de 12 L.



Exercice 13

1. $g(x)$ est strictement négatif pour $x < -4$; $g(x)$ est strictement positif pour $x > -4$.



2. La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc on élimine la réponse **a.** qui correspond à une fonction affine strictement décroissante ($a = -1$).

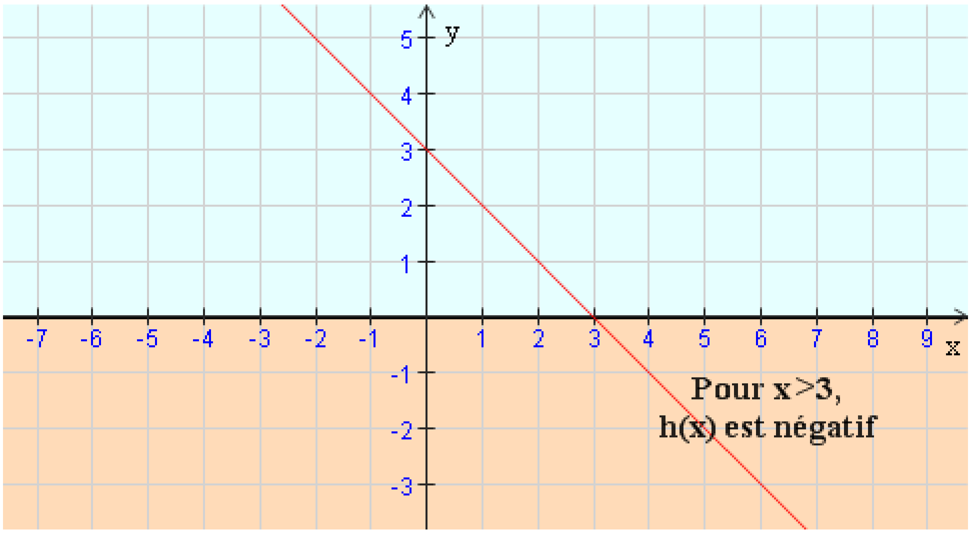
Il faut de plus que $g(-4) = 0$. Seule la réponse **d.** correspond à ce critère.

Exercice 14

Soit $h(x) = -x + 3$.

1. $h(x) < 0$ revient à $-x + 3 < 0$ c'est-à-dire à $3 < x$.

2. Représentation graphique :



3. Comme $\pi > 3$, on est sûr que $h(\pi)$ est négatif.

Comme $\frac{7}{11} < 1 < 3$, on est sûr que $h(\frac{7}{11})$ est positif.

Exercice 15

On utilise la méthode de l'exercice résolu 8 page 63.

a. Soit $f(x) = ax + b$ avec $f(-2) = 0$ et $f(1) = 3$.

• Calcul de a :

$$a = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{3 - 0}{1 - (-2)} = \frac{3}{3} = 1$$

• Calcul de b :

On a $f(x) = x + b$ et $f(1) = 3$ donc $1 + b = 3$ et par suite $b = 2$.

On en déduit que $f(x) = x + 2$.

Remarque : on peut vérifier que $f(-2) = 0$

b. Soit $f(x) = ax + b$ avec $f(-1) = 2$ et $f((0) = 5$

De même on trouve $a = \frac{5-2}{0-(-1)} = 3$.

Comme $f(0) = 5$, on a $b = 5$.

Par suite $f(x) = 3x + 5$.

Remarque : on peut vérifier que $f(-1) = 2$