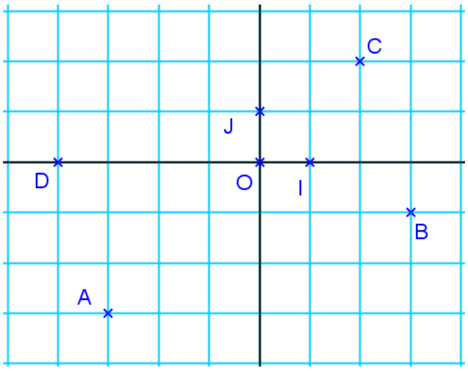
Exercice 102

1.



2.a Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -4-(-3) \\ 0-(-3) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont les mêmes coordonnées donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

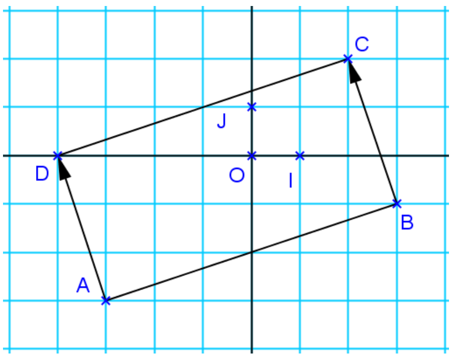
Méthode

On utilise la méthode décrite dans l'exercice résolu 4, page 319.

Conseil

On vérifie la cohérence de ces coordonnées sur la figure.

2.b Par définition de l'égalité de deux vecteurs, dire que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ c'est dire que ADCB est un parallélogramme.



3.a. Sur la figure le triangle ABD semble rectangle en A. Démontrons-le.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ donc

$AB = \sqrt{(3-(-3))^2 + \left(-1-(-3)\right)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

De même,

$AD = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(-4-3)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$.

On constate que $AB^2 + AD^2 = BD^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.

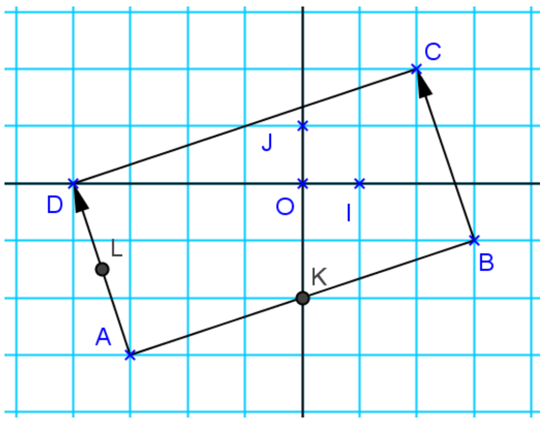
Méthode

On pourra revoir l'exercice résolu 4 page 248.

3.b. ABCD est un parallélogramme avec un angle droit, c'est donc un rectangle.

4. On sait que K $\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ (voir chapitre 10).
D'où $x_K = \frac{-3+3}{2} = 0$ et $y_K = \frac{-3+(-1)}{2} = -2$.
On a donc K$(0 ; -2)$.

De même $x_L = \frac{-3-4}{2} = \frac{-7}{2}$ et $y_L = \frac{-3+0}{2} = \frac{-3}{2}$
d'où L $\left(-\frac{7}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ ou encore L $(-3{,}5 ; -1{,}5)$.



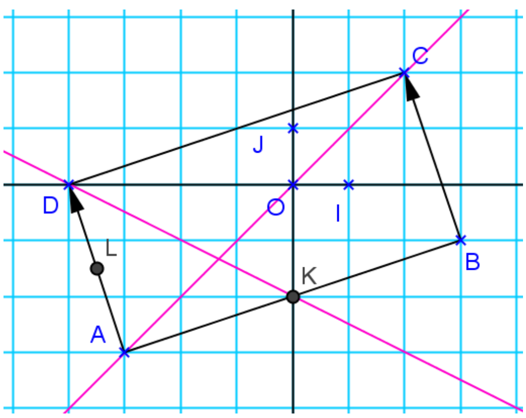
Conseil
On contrôle les résultats sur la figure

5.a. <u>Équation de (AC) :</u>
Coefficient directeur : $\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A} = \frac{2-(-3)}{2-(-3)} = 1$.
La droite (AC) a donc une équation de la forme $y = x + b$.
Le point C(2 ; 2) appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = x + b$ de la droite c'est à dire :
$y_C = x_C + b$
d'où $2 = 2 + b$
et donc $b = 0$.
La droite (AC) a pour équation $y = x$.

Méthode
On utilise la méthode décrite dans l'exercice résolu 5, page 319.

<u>Équation de (DK) :</u>
Coefficient directeur: $\frac{0-(-2)}{-4-0} = \frac{-1}{2}$.
La droite (DK) a donc une équation de la forme $y = -\frac{1}{2}x + b$.
Le point D $(0 ; -2)$ appartient à cette droite donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $-2 = 0 + b$ d'où $b = -2$.
La droite (DK) a pour équation $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Conseil
On contrôle sur la figure les coefficients directeurs et les ordonnées à l'origine trouvés par le calcul.



5.b. Le point d'intersection E a ses coordonnées $(x_E ; y_E)$ qui vérifient les équations des deux droites :

$y_E = x_E$ et $y_E = -\frac{1}{2}x_E - 2$.

On en déduit que $x_E = -\frac{1}{2}x_E - 2$

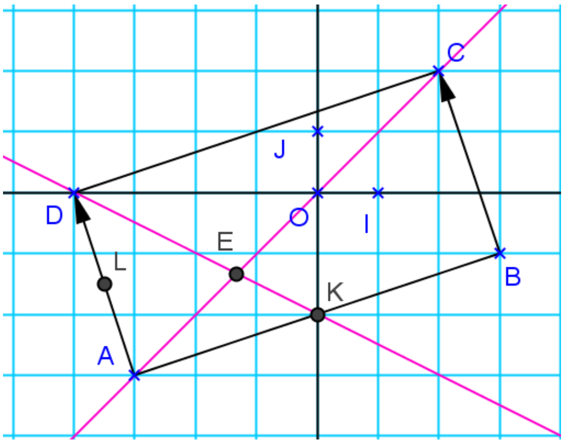
d'où $x_E + \frac{1}{2}x_E = -2$ ou encore $\frac{3}{2}x_E = -2$.

On a donc $x_E = -\frac{2}{\frac{3}{2}} = -2 \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$.

Comme $y_E = x_E$, on a finalement $E(-\frac{4}{3} ; -\frac{4}{3})$.

Méthode

Voir exercice résolu 4 page 295.



Conseil

On contrôle les coordonnées de E sur la figure à l'aide de valeurs approchées : $-\frac{4}{3} \approx -1{,}3$.

6. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{LE}$ et $\overrightarrow{LB}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} - (-\frac{7}{2}) \\ -\frac{4}{3} - (-\frac{3}{2}) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} + \frac{7}{2} \\ -\frac{4}{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ c'est-à-dire en réduisant au même dénominateur, $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} -\frac{8}{6} + \frac{21}{6} \\ -\frac{8}{6} + \frac{9}{6} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

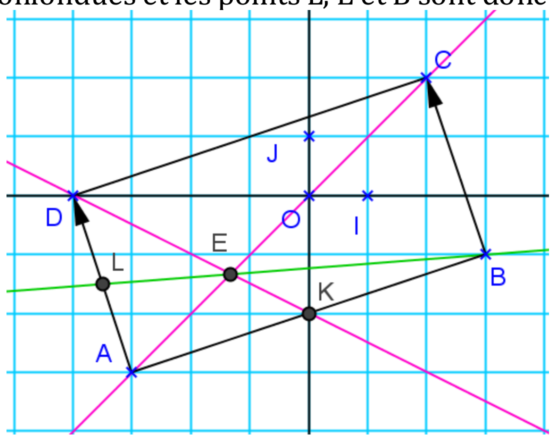
De même $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix} 3 - (-\frac{7}{2}) \\ -1 - (-\frac{3}{2}) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix} 3 + \frac{7}{2} \\ -1 + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{LB} = 3\,\overrightarrow{LE}$ (ou on vérifie que $\frac{13}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times \frac{13}{2}$).

Les vecteurs $\overrightarrow{LE}$ et $\overrightarrow{LB}$ sont donc colinéaires. Les droites (LE) et (LB) sont de ce fait parallèles. Ayant L en commun, elles sont confondues et les points L, E et B sont donc alignés.

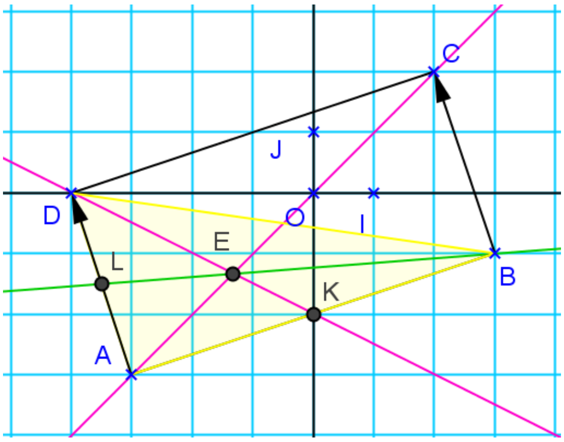
Méthode

Voir exercice résolu 12 page 325.



……

Pour aller plus loin



Dans le triangle DAB, K est le milieu de [AB] donc la droite (DK) est la médiane issue de D.
Les diagonales du parallélogramme ABCD se coupent en leur milieu donc la droite (AC) coupe [BD] en son milieu.
C'est dire que (AC) est la médiane issue de A dans le triangle DAB.
Ces deux médianes du triangle DAB sont sécantes en E.

La troisième médiane du triangle DAB est le droite (BL) puisque L est le milieu de [AD].
Comme les trois médianes sont concourantes, (BL) passe par le point d'intersection des deux autres médianes c'est-à-dire par E. Ainsi B, E et L sont alignés.