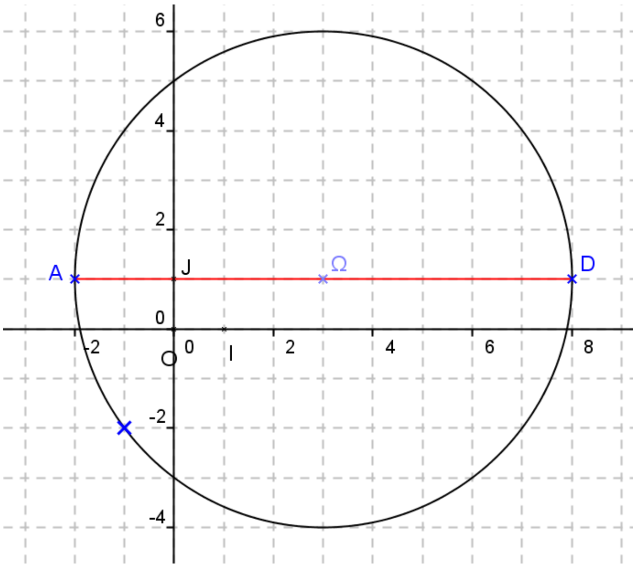
Exercice 107

1.a. Le centre du cercle de diamètre [AD] est le milieu du segment [AD].
Donc $x_\Omega = \frac{x_A + x_D}{2}$ et $y_\Omega = \frac{y_A + y_D}{2}$
On obtient $\Omega(3;1)$.
Remarque : $y_A = y_D = 1$ donc, sans calcul, $y_\Omega = 1$.

Le diamètre du cercle est $\text{AD} = 10$ donc le rayon du cercle est 5.

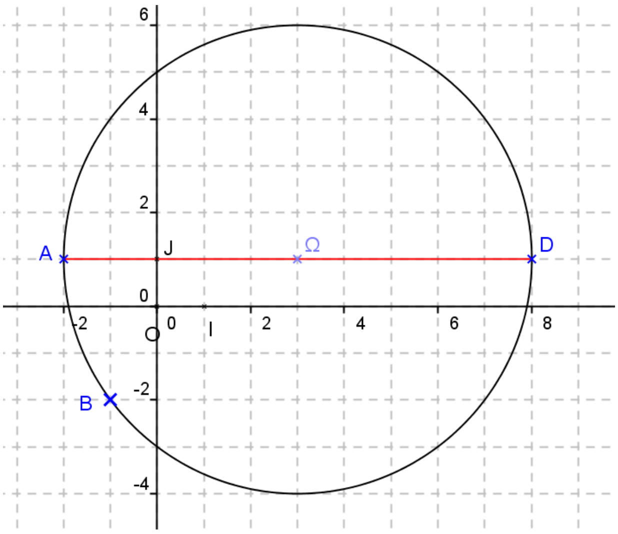


Conseil
On contrôle les résultats sur la figure.
Attention ! Le rayon est égal à 5 unités de longueur (voir exercice résolu 3 page 247).

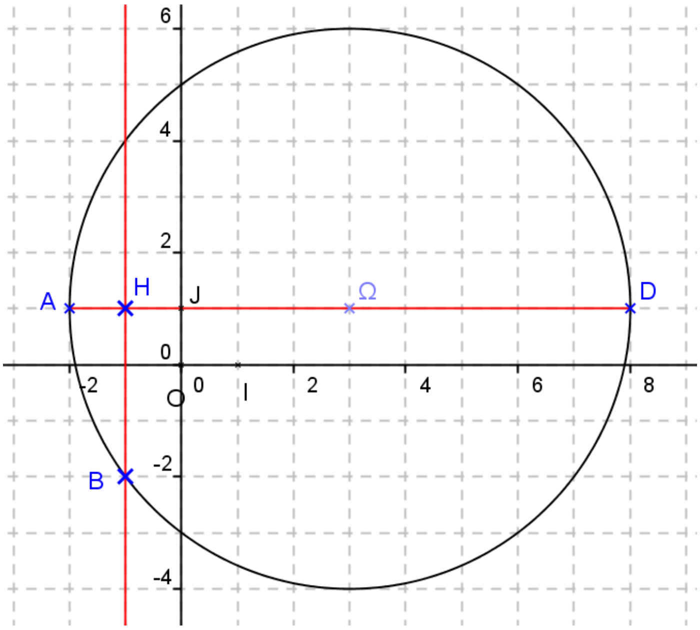
1.b. Le point B appartient au cercle s'il est à une distance 5 du centre c'est-à-dire si $\Omega\text{B} = 5$.

$$\Omega\text{B} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Le point B appartient bien au cercle.



1.c. Plaçons H sur la figure.



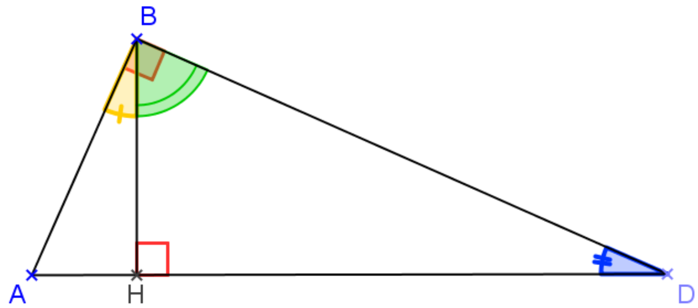
Les points A, H et D ont la même ordonnée donc ils appartiennent à une même droite parallèle à l'axe des abscisses.
Donc H appartient à la droite (AD).

Les points B et H ont même abscisse donc (BH)// (OJ).
De plus, (AD) // (OI).
Le repère étant orthonormé, (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.
Donc (AD) et (BH) sont perpendiculaires.

Conseil
La figure aide à trouver des solutions très simples à ces questions. Mais c'est bien parce que les axes du repère sont perpendiculaires que des lignes du quadrillage le sont aussi. Cet élément du raisonnement est donc à rédiger dans la démonstration.

1.d. $AH = 1$ et $AD = 10$ donc $AH \times AD = 10$.
D'autre part,
$AB^2 = (-1-(-2))^2 + (-2-1)^2 = 1 + 9 = 10$
On a donc bien $AB^2 = AH \times AD$.

2. a. Faisons une figure.



La somme des angles dans un triangle est 180° donc dans un triangle rectangle la somme des deux angles autres que l'angle droit est 90°.
Dans le triangle BHD rectangle en H, on a donc $\widehat{HBD} + \widehat{ADB} = 90°$.

Or $\widehat{HBD} + \widehat{ABH} = 90°$ car le triangle ABD est rectangle en B.
On en déduit que $\widehat{ABH} = \widehat{ADB}$.

Conseil
Ne pas hésiter à utiliser des couleurs différentes pour les angles, ou à la numéroter, pour simplifier le raisonnement dans un premier temps :
« l'angle vert + l'angle orange égale 90° ».

Remarque
On démontre que $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ABH}$ sont complémentaires du même angle $\widehat{HBD}$.

2.b. Dans le triangle rectangle ABH,
$\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB}$
Dans le triangle rectangle ABD,
$\sin \widehat{ADB} = \frac{AB}{AD}$.
Comme $\widehat{ABH} = \widehat{ADB}$ (question 2.a .), les sinus de ces angles sont égaux donc $\frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AD}$.
On en déduit que $AH \times AD = AB \times AB$,
soit $AB^2 = AH \times AD$.

Analyse de l'énoncé
On pourrait passer beaucoup de temps à écrire des relations trigonométriques, dans chacun des trois triangles rectangles de la figure !
Il faut plutôt analyser l'énoncé. Il nous suggère :
— d'utiliser les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ABH}$ dont il vient de nous faire démontrer l'égalité.
— de choisir des relations trigonométriques qui font intervenir AB, AH,AD compte tenu du résultat voulu.
En combinant ces deux idées, la solution arrive directement en trois étapes.

2.b. Dans le triangle rectangle AHB,
$\sin \widehat{\mathrm{ABH}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}$ d'où $\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{AH}}{\sin \widehat{\mathrm{ABH}}}$

Dans le triangle rectangle ABD ,
$\sin \widehat{\mathrm{ADB}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$ d'où $\mathrm{AB} = \mathrm{AD} \times \sin \widehat{\mathrm{ADB}}$

On a donc $\mathrm{AB} \times \mathrm{AB} = \frac{\mathrm{AH}}{\sin \widehat{\mathrm{ABH}}} \times \mathrm{AD} \times \sin \widehat{\mathrm{ADB}}$

De plus $\widehat{ABH} = \widehat{ADB}$ donc $\sin \widehat{ABH} = \sin \widehat{ADB}$
d'où $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH} \times \mathrm{AD}$