1.a. $u_1 = 10u_0 + 21 = 31$; $u_2 = 331$ et $u_3 = 3331$.

b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

▪ **Initialisation**

Pour $n = 0$, $3u_0 = 3\times1 = 3$ et $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3$.
On a donc bien $3u_n = 10^{n+1} - 7$ pour $n = 0$.

▪ **Hérédité**

Soit n un entier naturel .Supposons que pour cet entier n, on ait $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

Montrons que $3u_{n+1} = 10^{n+1+1} - 7$ c'est-à-dire $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$.

Par définition de la suite, on a $u_{n+1} = 10u_n + 21$ donc

$3u_{n+1} = 3\times10u_n + 63 = 10\times 3u_n + 63$.

Par hypothèse de récurrence, $3u_n = 10^{n+1} - 7$ donc en remplaçant dans $3u_{n+1}$, on obtient :
$3u_{n+1} = 10\times(10^{n+1} - 7) + 63$.

Soit $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 70 + 63 = 10^{n+2} - 7$.

▪ **Conclusion**

L'égalité $3u_n = 10^{n+1} - 7$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir du rang 0, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

c. Pour $n = 0$, $u_n = 1$.

Pour $n \geq 1$, $3u_n = 10^{n+1} - 7$ donc $3u_n$ s'écrit avec n chiffre(s) 9 suivi(s) d'un chiffre 3. :

$$3u_n = \underbrace{999....9}_{n \text{ chiffre(s)}}3$$

Par conséquent, en divisant par 3, u_n s'écrit avec n chiffres 3 suivis d'un chiffre 1

$$u_n = \underbrace{333...3}_{n \text{ chiffre(s)}}1$$

Remarque : on peut rassembler les cas $n = 0$ et $n \geq 1$ en concluant que u_n s'écrit avec n chiffre(s) 3 suivi(s) d'un chiffre 1.

2. Connaissant désormais l'écriture décimale de u_n, on peut utiliser des critères de divisibilité connus.

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

▪ u_n a pour chiffre des unités 1 donc il n'est divisible ni par 2 ni par 5.

▪ la somme des chiffres de u_n est $3n + 1$ donc n'est pas un multiple de 3 (son reste dans la division par 3 est égal à 1). Donc u_n n'est pas divisible par 3.

3.a. On a prouvé que pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

Or $10 = 11 - 1$ donc $10 \equiv -1$ (modulo 11).

Par propriété des congruences, pour tout entier naturel n, $10^{n+1} \equiv (-1)^{n+1}$ (modulo 11).

On en déduit que $3u_n \equiv (-1)^{n+1} - 7$ (modulo 11).

On remarque que $(-1)^{n+1} = -1\times(-1)^n = -(-1)^n$ donc $3u_n \equiv -(-1)^n - 7$ (modulo 11).

Il reste à vérifier que $-7 \equiv 4$ (modulo 11). C'est bien le cas puisque la différence $-7 - 4 = -11$ est un multiple de 11.

Donc $3u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo 11).

b. Supposons que u_n soit divisible par 11, alors $u_n \equiv 0$ (modulo 11) donc $3u_n \equiv 0$ (modulo 11).

Or pout tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo 11).

Donc pour n pair, $3u_n \equiv 3$ (modulo 11) avec $0 \leq 3 < 11$,

et pour n impair, $3u_n \equiv 5$ (modulo 11) avec $0 \leq 5 < 11$.

Dans aucun cas $3u_n$ n'est congru à 0 modulo 11.

Par suite, pour tout n entier naturel, u_n n'est pas divisible par 11.

4. a. À l'initialisation, r contient la valeur 1. Lors du 1er passage dans la boucle Tantque… FinTantque, r contient la valeur 14 (reste dans la division de $10\times1 + 4 = 14$ par 17)

Lors du 2e passage dans la boucle Tantque… FinTantque, r contient la valeur 8 (reste dans la division de $10\times14 + 4 = 144$ par 17)

b. Par hypothèse $u_n \equiv r_n$ (17) avec $0 \leq r_n < 17$.

Comme $u_{n+1} = 10u_n + 21$ avec $21 \equiv 4\ (17)$, on a $u_{n+1} \equiv 10u_n + 4\ (17)$.

Par conséquent $u_{n+1} \equiv 10r_n + 4\ (17)$. Or $u_{n+1} \equiv r_{n+1}\ (17)$ puisque r_{n+1} est le reste dans la division de u_{n+1} par 17. On en déduit que $r_{n+1} \equiv 10r_n + 4\ (17)$.

c. De l'initialisation de r à 1 c'est-à-dire r_0, de la formule de récurrence trouvée en 4.b et du fait que $0 \leq r < 17$, on déduit que les valeurs successives contenues dans la variables r sont les premiers termes de la suite (r_n).

Or l 'algorithme s'arrête quand on sort de la boucle Tantque… FinTantque c'est-à-dire quand r contient la valeur 0.

À la fin de chaque passage dans la boucle Tantque….FinTantque, r contient le reste dans la division par 17 d'un terme de la suite et n contient l'indice de ce terme de la suite.

Si l'algorithme affiche la valeur 8, c'est donc que u_8 est le premier terme de la suite qui est multiple de 17.

Illustration sur un tableur de la démarche précédente :

	A	B	C	D	E	F	G
1		suite			algorithme		
2	n	u_n	r_n		r	n	
3	0	1	1		1	0	Initialisation
4	1	31	14		14	1	1er passage dans la boucle Tantque...FinTantque
5	2	331	8		8	2	2e passage dans la boucle
6	3	3331	16		16	3	
7	4	33331	11		11	4	
8	5	333331	12		12	5	
9	6	3333331	5		5	6	
10	7	33333331	3		3	7	
11	8	333333331	0		0	8	dernier pasage dans la boucle
12							
13	=10*B3+21			=MOD(10*E3+4;17)			