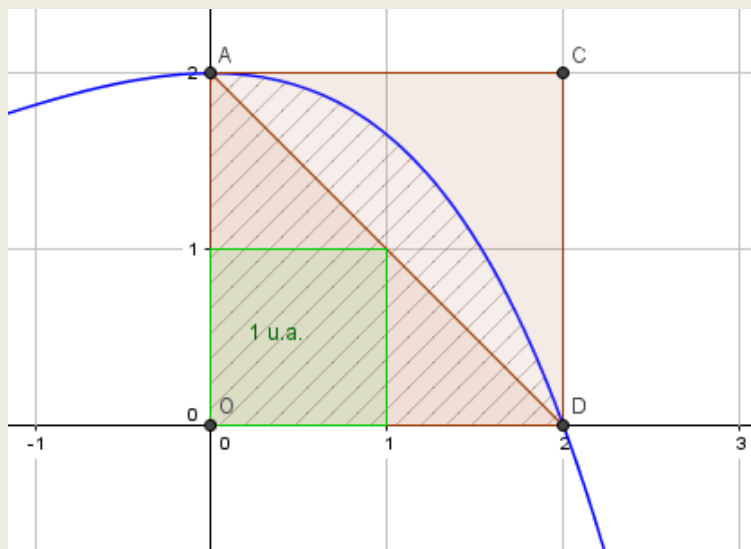


Chapitre 5 – Corrigé détaillé – Objectif Bac

1. Sur le graphique ci-dessous, on peut interpréter cette intégrale comme la mesure de l'aire, en u.a., de la portion du plan hachurée comprise entre la courbe représentant f , en bleu, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



Cette aire est supérieure à l'aire du triangle OAD qui est égale à 2 u.a ET elle est inférieure à celle du rectangle OACD qui est égale à 4. Par conséquent, $2 \leq \int_0^2 f(x)dx \leq 4$.

2. a. F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons $F'(x)$:

$$F(x) = u(x)v(x) \text{ avec } u(x) = -2x+8 \text{ et } v(x) = e^{0,5x}$$

$$\text{Donc } u'(x) = -2 \text{ et } v'(x) = 0,5e^{0,5x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } F'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -2e^{0,5x} + (-2x+8) \times 0,5e^{0,5x}. \end{aligned}$$

On met $e^{0,5x}$ en facteur :

$$F'(x) = e^{0,5x} [-2 + 0,5(-2x+8)]$$

$$F'(x) = e^{0,5x} [-2 -x+4] = (-x+2)e^{0,5x}.$$

On constate que $F'(x) = f(x)$, ce qui prouve que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. On sait que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

$$\text{Or } F(2) = (-2 \times 2 + 8)e^{0,5 \times 2} = 4e^1 = 4e \text{ et } F(0) = (-2 \times 0 + 8)e^{0,5 \times 0} = 8e^0 = 8.$$

$$\text{On en déduit que : } \int_0^2 f(x)dx = 4e - 8.$$

Aide

Dire que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ signifie que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.

Attention !

Si $v(x) = e^{0,5x}$, $v'(x) = 0,5e^{0,5x}$.
Ne pas oublier le 0,5 !

À la calculatrice, on calcule $4^e - 8$ et on trouve

$\approx 2,87$ à 0,01 près.

Conseil

Contrôler ce résultat en calculant l'intégrale à la calculatrice.
Sur TI 83 Premium Connect :

$$\int_0^2 ((-x+2) * e^{0.5*x}) dx$$

2.873127314

3. On peut faire appel à différents arguments.

Par exemple, on sait que

$$0) \text{ donc } G(2) - G(0) \approx 2,87.$$

La courbe rouge ne peut donc pas représenter G

(pour cette courbe on aurait $G(2) - G(0) < 0,5$).

Le sens de variation de G est donné par le signe de sa dérivée f .

Or $f(x) = (-x+2)e^{0,5x}$ avec $e^{0,5x}$ qui est toujours strictement positif.

Donc la signe de $f(x)$ est celui de $(-x+2)$, fonction affine strictement décroissante qui s'annule en 2.

Donc $f(x) > 0$ pour $x < 2$ et $f(x) < 0$ pour $x > 2$.

Aide

- Les trois courbes proposées correspondent à des fonctions qui ont des sens de variations différents. Le plus simple est sans doute de s'appuyer sur le sens de variation de G qui est donné par le signe de sa dérivée f .
- Dans le cas où les courbes correspondent à des fonctions ayant le même sens de variation, il faut s'appuyer sur d'autres informations, comme des valeurs connues.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $-x+2$	+	0	-
Signe de $f(x) = G'(x)$	+	0	-
Variations de G			

C'est donc la courbe en bleu qui peut, seule, correspondre à la fonction G .

Conseil

F étant déjà une primitive de f , on sait qu'il existe une constante réelle k telle que

$G(x) = F(x) + k$ pour tout réel x (Propriété 1 page 150).

De ce fait les courbes représentatives de F et G ont la même allure, elles sont traduites l'une de l'autre vers le haut ou le bas du graphique. On peut donc tracer la courbe représentant F (ci-dessous) sur la calculatrice et contrôler que c'est bien la courbe en bleu qui en est une traduite :

