Chapitre 3 – Objectif Bac – Résolution détaillée

A. Déterminons les variations de *h*.

Le sens de variation de *h* est obtenu en étudiant le signe de sa dérivée.

La fonction *h* est dérivable sur l'intervalle [-3 ; 3].

On a $h(x) = 2(x-1)e^x + 1$.

Or $(x-1)e^x = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x-1$, $u'(x) = 1$,

$v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.

Donc $h'(x) = 2[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)] = 2[e^x + (x-1)e^x]$.

Soit $h'(x) = 2xe^x$.

Comme e^x est strictement positif pour tout réel x,

le signe de $h'(x)$ est celui de x.

x	-3		0		3
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$h(-3)$	↘	-1	↗	$h(3)$

À la calculatrice on obtient :

X	Y1
-3	0.6017
-2	0.188
-1	-0.472
0	-1
1	1
2	15.778
3	81.342

donc $h(-3) \approx 0{,}6$ et $h(3) \approx 81$.

La fonction *h* étant continue (car dérivable) et strictement décroissante sur [-3 ; 0] avec $h(-3) > 0$ et $h(0) < 0$, l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α dans [-3 ; 0].

De même sur [0 ; 3], l'équation a une unique solution β.

Conseil

La question demande de montrer que l'équation a deux solutions puis de donner des valeurs approchées des deux solutions. Il ne s'agit donc pas de chercher à réosudre l'équation, et il faut reconnaître tout de suite que la réponse mobilise le théorèmes des valeurs intermédiaires.

La première chose à faire est donc de dresser le tableau de variations de la fonction *h*.

Aide

On peut s'aider du tableau de variations.

- On place d'abord les valeurs 0 prises par *h* :

x	-3			0			3
$h'(x)$		-		0		+	
$h(x)$	$\approx 0{,}6$	↘ 0	↘	-1	↗	0 ↗	≈ 81

- On place ensuite leurs antécédents :

x	-3	α		0		β	3
$h'(x)$		-		0		+	
$h(x)$	$\approx 0{,}6$	0	↘	-1	↗	0	≈ 81

À l’aide du tableau de valeurs ci-dessus, on localise α entre -2 et -1 et β entre 0 et 1.

En refaisant un tableau de valeurs avec un pas de 0,1 à partir de -2, on obtient :

X	Y1
-2	0.188
-1.9	0.1325
-1.8	0.0743
-1.7	0.0135
-1.6	-0.05
-1.5	-0.116
-1.4	-0.184

Ceci permet de localiser α entre-1,7 et-1,6.

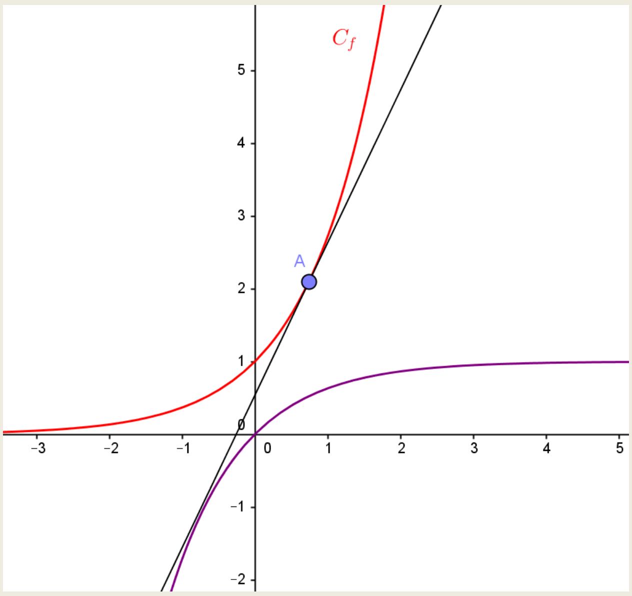
Puis avec un tableau de valeurs avec un pas de 0,01 à partir de -1,7 :

X	Y1
-1.7	0.0135
-1.69	0.0073
-1.68	0.001
-1.67	-0.005
-1.66	-0.012
-1.65	-0.018

On obtient à 0,01 près. De même, on trouve 77.

B. 1. À la main ou sur un logiciel, on trouve deux positions possibles d’une tangente à $\mathcal{C}_f$ en A qui semble tangente aussi à $\mathcal{C}_g$.

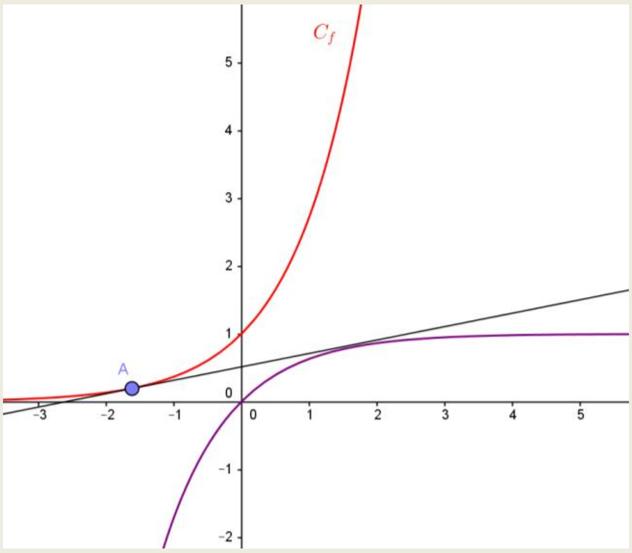
Graphique 1



Conseil

- On pourra ouvrir le fichier GeoGebra disponible sur le site puis on déplacera le point A de $\mathcal{C}_f$ jusqu’à ce que la tangente en A à $\mathcal{C}_f$ semble être aussi tangente à $\mathcal{C}_g$.
- On peut faire la même manipulation sur papier, en plaçant la règle pour matérialiser une tangente à $\mathcal{C}_f$.

Graphique 2



2. a. Les fonctions f et g sont dérivables.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A a pour coefficient directeur $f'(a)$.

La tangente à $\mathcal{C}_g$ en B a pour coefficient directeur $g'(b)$.

Pour que ces deux tangentes soient confondues on doit donc avoir $f'(a) = g'(b)$.

Or $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$.

Donc $f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow e^a = e^{-b} \Leftrightarrow a = -b$.

b. L'équation réduite de T s'écrit alors aussi bien :

• Comme tangente à $\mathcal{C}_f$ en A :

′ $= e^a(x-a)+e^a = e^a x + (1-a)e^a$.

• Comme tangente à $\mathcal{C}_g$ en B :

′ $(b) = e^{-b}(x-b) + 1-e^{-b} = e^{-b}x + 1 - e^{-b}(1+b)$.

En remplaçant b par $-a$ on obtient : $y = e^a x + 1 - e^a(1-a)$.

On doit donc avoir les mêmes ordonnées à l'origine dans les deux équations pour que les droites soient confondues c'est-à-dire :

$(1-a)e^a = 1 - e^a(1-a)$

ce qui sécrit encore $1-2e^a(1-a) = 0$

ou encore $2e^a(a-1)+1=0$.

On en déduit que a est solution de l'équation $h(x) = 0$, donc $a = \alpha$ ou β.

Or $\alpha < \beta$ donc par stricte croissance de la fonction exponentielle. Autrement dit $f'(\alpha)$ ′).

Comme T est la tangente commune de plus grand coefficient directeur, on en déduit que $a = \beta$.

Aide

Les tangentes en A à $\mathcal{C}_f$ et en B à $\mathcal{C}_g$ sont confondues si et seulement si elles doivent avoir même coefficient directeur (c'est ce que l'on expirme en question 2.a.) et même ordonnée à l'origine (ce qui est utilisé en question 2.b.).

Conseil

On contrôle graphiquement que l'abscisse du point A du graphique 1 est cohérente avec la valeur approchée de β trouvée en question 1.