Exercice 93

1. Aire du carré CNPM

$aire(\text{CNMP}) = \text{CN}^2$

Or CD = 5 et DN = x donc CN = 5 – x (en cm).

Par suite $aire(\text{CNMP}) = (5-x)^2$ en cm².

Aire du triangle ABM

ABM est un triangle rectangle en A avec AB = 5 et BM $= x$. On en déduit que

$aire(\text{ABM}) = \frac{1}{2}\text{AB} \times \text{BM} = \frac{5}{2}x$.

Aire du triangle AND

De même AND est rectangle en A avec AD = 5 et DN = x donc

$aire(\text{AND}) = \frac{1}{2}\text{AD} \times \text{DN} = \frac{5}{2}x$.

↘ Méthode

On calcule l'aire d'un triangle par la formule :

$Aire\ d'un\ triangle = \frac{base \times hauteur}{2}$

Pour un triangle rectangle si la base est l'un des côtés de l'angle droit, la hauteur est l'autre côté de l'angle droit.

2. $A(x)$ est égale à la différence :

$aire(\text{ABCD}) - aire(\text{CNMP}) - aire(\text{ABM}) - aire(\text{AND})$.

Donc $A(x) = 25 - (5-x)^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x$.

En développant $(5-x)^2$ (identité remarquable) :

$A(x) = 25 - (25 - 10x + x^2) - 5x$

D'où $A(x) = 25 - 25 + 10x - x^2 = -x^2 + 5x$.

↘ Conseil

Ne pas oublier d'ajouter des parenthèses (en rouge ci-contre) pour que le signe « – » porte bien sur toute la forme développée de $(5-x)^2$.

3. Pour démontrer l'égalité, le plus simple est de développer le membre de droite :

$$-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} = -\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{25}{4}$$
$$= -x^2 + 5x.$$

On constate donc que $-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ et $A(x)$ sont tous deux égaux à $-x^2 + 5x$, donc

$A(x) = -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ pour tout x de $[0\,;5]$.

↘ Méthode

On pourra revoir les méthodes de l'exercice résolu 1 page 85.

4. a. A est une fonction polynôme de degré 2 car $A(x) = -x^2 + 5x$ c'est-à-dire

$A(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 5$, $c = 0$.

On sait qu'elle est :

– soit strictement décroissante puis strictement croissante

– soit strictement croissante puis strictement décroissante.

↘ Méthode

Pour trouver le sens de variation de A, on peut aussi observer que a est négatif et en déduire que A est strictement croissante puis strictement décroissante.

Or $A(x) = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}$, avec $(x - \frac{5}{2})^2$ qui est toujours positif ou nul donc $-(x - \frac{5}{2})^2$ qui est toujours négatif ou nul.
Ainsi $A(x) \leq \frac{25}{4}$ pour tout x de [0 ; 5].
De plus $A(x) = \frac{25}{4}$ pour $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$ soit $x = \frac{5}{2}$.
On en déduit que A atteint son maximum $\frac{25}{4}$ en $\frac{5}{2}$.

Méthode
Pour montrer que $\frac{25}{4}$ est le maximum de A il faut :
– montrer que pour tout x, $A(x) \leq \frac{25}{4}$.
– trouver un réel x qui a pour image $\frac{25}{4}$.

C'est donc que A est strictement croissante puis strictement décroissante.

D'où son tableau de variations :

x	0	$\frac{5}{2}$	5
$A(x)$	0	$\frac{25}{4}$	0

Conseil
Contrôler ces résultats en traçant la courbe représentative de A sur la calculatrice.

4. b. Avec x = BM, $x = 1{,}4$ correspond à la figure 1, $x = 2{,}9$ à la figure 2, et $x = 4{,}3$ à la figure 3.

<u>Solution 1</u> **:** par le calcul.
$A(1{,}4) = 5{,}04$; $A(2{,}9) = 6{,}09$ et $A(4{,}3) = 3{,}01$.
On a donc $A(4{,}3) < A(1{,}4) < A(2{,}9)$ soit dans l'ordre croissant de leurs aires : figure 3 ; figure 1 ; figure 2

<u>Solution 2</u> **:** sans calcul.
La parabole représentant la fonction A a pour axe de symétrie $x = 2{,}5$. Donc $A(1,4) = A(3,6)$.
Dans [2,5 ; 5], on a $2{,}9 < 3{,}6 < 4{,}3$ et A est strictement décroissante donc
$A(2{,}9) > A(3{,}6) > A(4{,}3)$.
Dans l'ordre croissant de leurs aires, on retrouve : figure 3, figure 1, figure 2 .

5. $A(x) = 5{,}25 \Leftrightarrow -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4} = 5{,}25$

$\Leftrightarrow -(x - \frac{5}{2})^2 = 0$.

La solution est donc $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$.
Ceci correspond au point M placé au milieu du segment [BC].