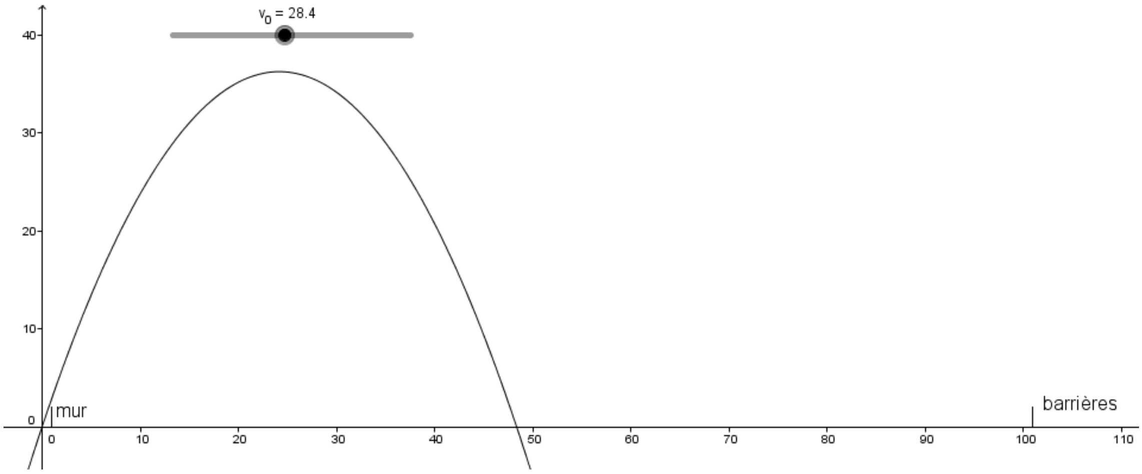
Exercice 107 Résolution détaillée

■ RECHERCHE A L'AIDE D'UN LOGICIEL

On peut faire la figure sur un logiciel comme GeoGebra avec v_0 variable et expérimenter.

Construction de la figure



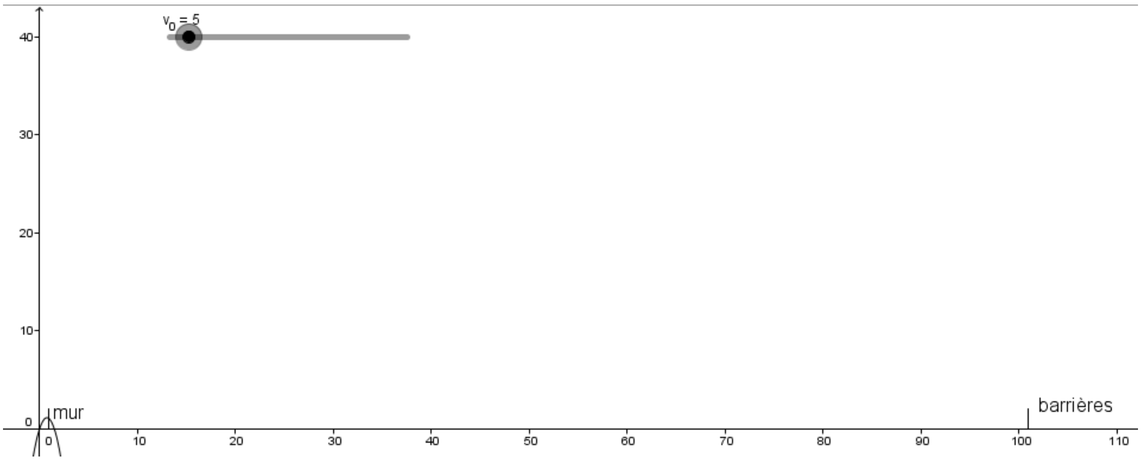
Protocole de construction :

No.	Nom	Icô...	Définition	Valeur
1	Point A			A = (1, 0)
2	Point B			B = (1, 2)
3	Segment a		Segment [AB]	a = 2
4	Point C			C = (101, 0)
5	Point D			D = (101, 2)
6	Segment b		Segment [CD]	b = 2
7	Nombre v_0	a = 2		$v_0 = 8$
8	Parabole c		$y = -(50 / v_0^2)\, x^2 + 3x$	c: $y = -0.78x^2 + 3x$

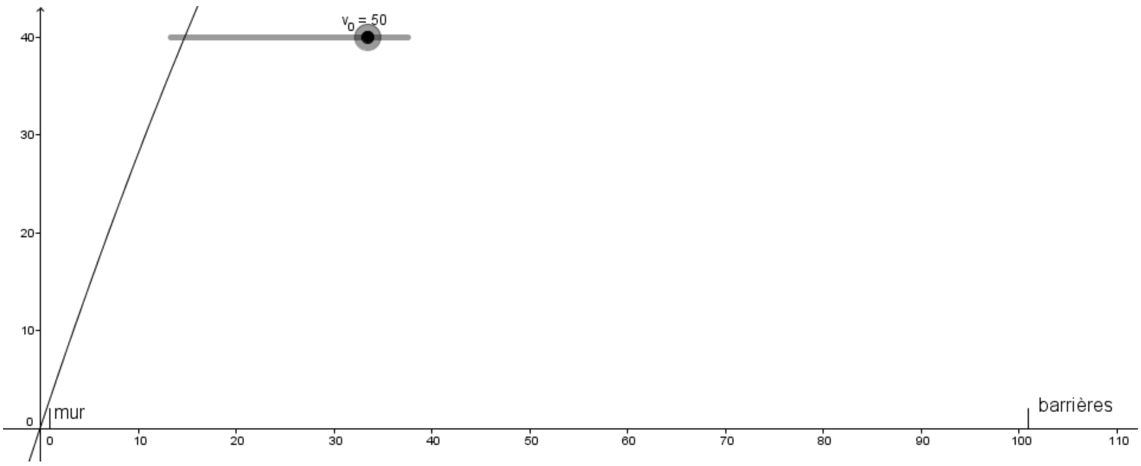
Expérimentation

Question 1. On fait varier le curseur v_0 pour étudier les trois valeurs proposées.

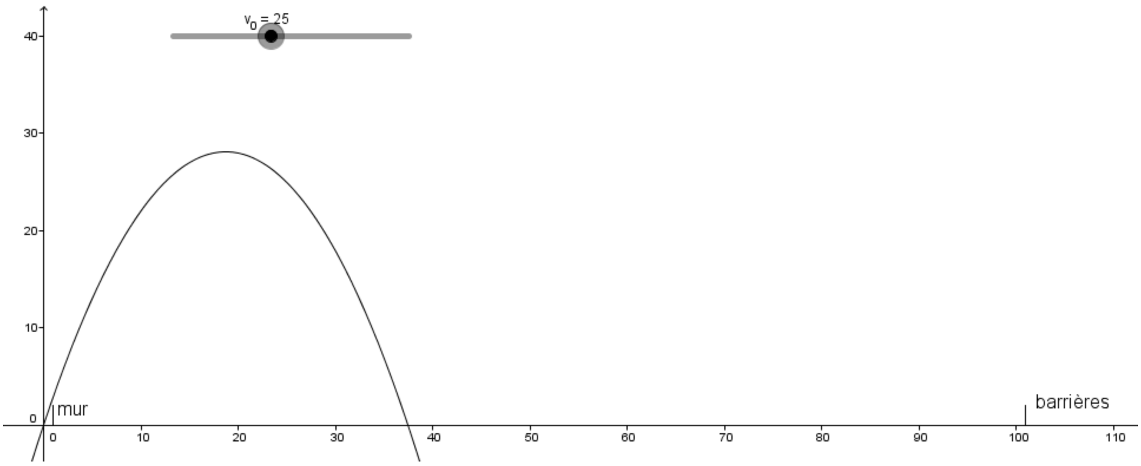
a. Pour $v_0 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la fusée ne passe pas le mur.



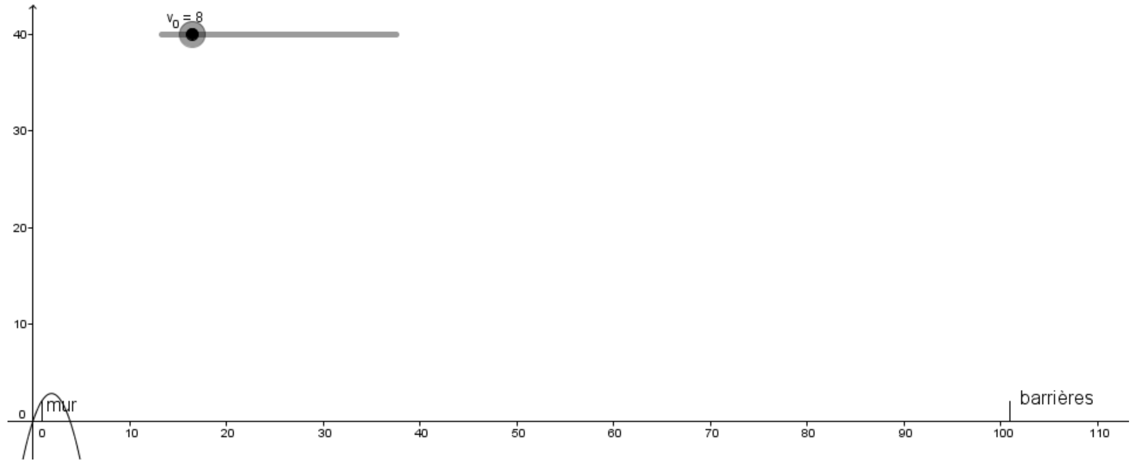
b. Pour $v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la fusée ne semble pas retomber avant les barrières de sécurité.

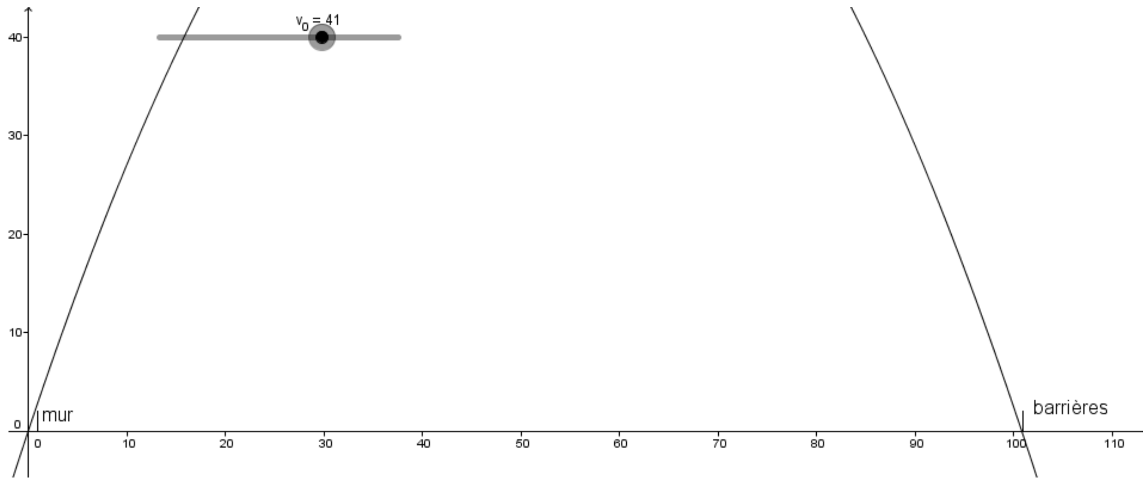


c. Pour $v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, les conditions semblent remplies.



Question 2. En faisant varier le curseur on cherche les valeurs de v_0 pour lesquelles les deux conditions semblent remplies. On trouve que c'est le cas pour v_0 comprise entre 8 et 10 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.





■ **RECHERCHE PAR LE CALCUL**

Analyse de l'énoncé

L'équation de la trajectoire dépend de la vitesse initiale v_0. Elle doit vérifier deux contraintes :

– la contrainte du mur : pour que la fusée passe au-dessus du mur, on doit avoir : pour $x = 1,\ y > 2$.

– la contrainte des barrières de sécurité : la fusée doit retomber avant les barrières si elle n'explose pas en l'air.

Si la fusée retombe à une distance x_0 (en mètres) de O, il faut que $1 < x_0 < 101$.

Le réel x_0 est tel que $y = 0$ pour $x = x_0$.

Question 1. a. Pour $v_0 = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, la trajectoire a pour équation $y = -\frac{50}{25}x^2 + 3x$ soit $y = -2x^2 + 3x$.

Pour $x = 1, y = 1$: la fusée ne passerait pas le mur.
Donc v_0 ne peut pas être égale à $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b. Pour $v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la trajectoire a pour équation $y = -0{,}02x^2 + 3x$.
Pour $x = 1, y = 2{,}98$: la fusée passe au-dessus du mur.
• Cherchons quand $y = 0$
$y = -0{,}02x^2 + 3x = x(-0{,}02\,x + 3)$
Donc $y = 0$ équivaut à $x = 0$ (départ de la fusée)
ou $-0{,}02\,x + 3 = 0$.
Or $-0{,}02\,x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0{,}02\,x \Leftrightarrow \frac{3}{0{,}02} = x$.
Soit $x = 150$.
La fusée retombe donc à 150 m de son point de départ si elle n'explose pas en vol, bien derrière les barrières de sécurité.
Donc $v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est impossible.

Méthode

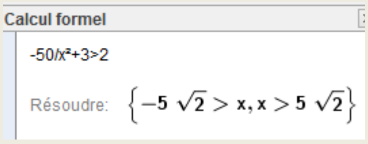
Pour résoudre l'équation $y = 0$, comme le trinôme n'a pas de terme constant ($c = 0$), on peut le factoriser pour éviter de calculer le discriminant.

c. Pour $v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, l'équation de la trajectoire est $y = -0{,}08x^2 + 3x$.
Pour $x = 1, y = 2{,}92$ donc la fusée passe au-dessus du mur.
De plus $y = x(-0{,}08x + 3)$ donc
$y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $-0{,}08\,x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{0{,}08} = 37{,}5$.
Si la fusée n'explose pas en l'air, elle retombe à 37,5 m de O donc avant les barrières de sécurité.
Il est donc possible d'envisager une vitesse v_0 égale à $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Question 2. La première contrainte s'exprime par
$-\frac{50}{v_0^2} + 3 > 2$ donc $1 > \frac{50}{v_0^2}$ soit $v_0^2 > 50$.
Comme v_0 est positif, ceci revient à $v_0 > \sqrt{50}$
avec $\sqrt{50} \approx 7{,}07$.
• Cherchons à quelle distance de O, la fusée peut retomber :
$y = x(-\frac{50}{v_0^2}x + 3)$ donc
$y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $-\frac{50}{v_0^2}x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3v_0^2}{50}$.
On doit donc avoir $\frac{3v_0^2}{50} < 101$ soit $v_0^2 < \frac{5050}{3}$ et, puisque v_0 est positive,
$v_0 < \sqrt{\frac{5050}{3}}$ avec $\sqrt{\frac{5050}{3}} \approx 41{,}028$.
Finalement, à 0,1 près v_0 doit être comprise, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, entre 7,1 et 41.

Méthode

On généralise ce que l'on a fait auparavant avec des valeurs numériques.
Pour résoudre les inéquations, on peut utiliser un logiciel de calcul formel.
Par exemple avec GeoGebra



(voir aide page 21).