

Exercice 105 Résolution détaillée

Une animation est disponible sur le site.

Question 1

Comme $AB < BC$, pour pouvoir construire M, N, P et Q, il faut et il suffit que la longueur AM, en cm, soit comprise entre 0 et 3.

Donc x appartient à $[0 ; 3]$ et l'ensemble de définition de la fonction \mathcal{A} est $[0 ; 3]$.

Méthode

L'aire d'un triangle est donnée par la formule :
$$\frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}.$$

Question 2

$\mathcal{A}(x)$ est égale à l'aire du rectangle ABCD à laquelle on retranche les aires des triangles rectangles MBN, QDP, NCP et MAQ.

$MB = 3 - x$; $BN = x$; $NC = 5 - x$; $CP = 3 - x$; $DP = x$; $DQ = x$ et $AQ = 5 - x$.

Par conséquent, MBN et PDQ ont la même aire $\frac{1}{2}x(3 - x)$ et NCP et QAM ont la même aire $\frac{1}{2}x(5 - x)$. On en déduit que :

$$\mathcal{A}(x) = 15 - 2 \times \frac{1}{2}(5 - x)x - 2 \times \frac{1}{2}(3 - x)x$$

$$\mathcal{A}(x) = 15 - (5 - x)x - (3 - x)x$$

$$\mathcal{A}(x) = 15 - (5x - x^2) - (3x - x^2)$$

$$\mathcal{A}(x) = 15 - 5x + x^2 - 3x + x^2$$

$$\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$$

Question 3

a. On cherche x tel que $\mathcal{A}(x) = 9$ c'est-à-dire x dans l'intervalle $[0 ; 3]$ tel que

$$2x^2 - 8x + 15 = 9$$

$$2x^2 - 8x + 15 = 9 \text{ s'écrit aussi}$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \text{ ou encore}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Il s'agit d'une équation de degré 2 de la forme

$ax^2 + bx + c = 0$. On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

Comme x_1 et x_2 appartiennent bien à $[0 ; 3]$, il y a deux positions de M telles que l'aire de MNPQ soit égale à 9 cm^2 : M à 1 cm de A sur [AB] ou M à 3 cm de A sur [AB], c'est-à-dire en B.

Méthode

Pour résoudre une équation de degré 2, on se ramène à une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Conseil

Quand on résout une équation $f(x) = k$, il faut bien penser à vérifier que les solutions obtenues par le calcul appartiennent à l'ensemble de définition de la fonction f . De même pour une inéquation $f(x) < k$.

b. On cherche x tel que $\mathcal{A}(x) \leq 9$.

On a donc à résoudre $2x^2 - 8x + 15 \leq 9$

Soit $2x^2 - 8x + 6 \leq 0$.

$2x^2 - 8x + 6$ est un trinôme dont le coefficient de x^2 est positif et qui a pour racines 1 et 3 (par la question a). Il est donc positif sauf entre ses racines.

On a donc $2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 3]$.

Comme $]1; 3[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction \mathcal{A} , on en déduit que MNPQ a une aire inférieure ou égale à 9 cm^2 si et seulement si x appartient à $[1; 3]$. (Si on a résolu $(x) < 9$, l'ensemble des solutions est $]1; 3[$).

c. La fonction \mathcal{A} est une fonction polynôme de degré 2 et le coefficient de x^2 est positif. Donc \mathcal{A} est strictement décroissante sur $] -\infty; -\frac{b}{2a}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$.

On calcule $-\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{4} = 2$ et on en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	2	3
$\mathcal{A}(x)$	15	7	9

d. On déduit du sens de variation de \mathcal{A} que :

- l'aire maximale de MNPQ est 15 cm^2 , obtenue pour $x = 0$ c'est-à-dire quand M est en A ;
- l'aire minimale de MNPQ est 7 cm^2 , obtenue quand M est à 2 cm de A sur $[AB]$.

Méthode

Pour résoudre une inéquation de degré 2, on se ramène à l'étude du signe d'un trinôme de degré 2 : voir exercice résolu 6 page 33.

Conseil

On vérifie que le sens de variation est cohérent avec les valeurs de $\mathcal{A}(x)$ placées dans la deuxième ligne du tableau. On peut contrôler graphiquement les coordonnées du sommet S (2 ; 7) en traçant la courbe d'équation $y = 2x^2 - 8x + 15$ sur la calculatrice.