Exercice 89 Résolution détaillée

1. Pour tout $x \in]0; 12]$ on a :

$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2+3x+64}{x} = x + 3 + \frac{64}{x}$

et $C_m(x) = C'(x) = 2x + 3$.

2. Méthode 1

$C_M(8) = 8 + 3 + \frac{64}{8} = 19$

Pour montrer que pour tout $x \in]0; 12]$,

$C_M(x) \geq 19$ on va montrer que

$C_M(x) - 19 \geq 0$.

$$\begin{aligned} C_M(x) - 19 &= x + 3 + \frac{64}{x} - 19 \\ &= x - 16 + \frac{64}{x} \\ &= \frac{x^2-16x+64}{x} \\ &= \frac{(x-8)^2}{x} \geq 0 \text{ car } x>0 \text{ et } (x-8)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Méthode 2

Pour tout $x \in]0; 12]$,

$C'_M(x) = 1 - \frac{64}{x^2} = \frac{x^2-64}{x^2} = \frac{(x-8)(x+8)}{x^2}$.

Étudier le signe de $C'_M(x)$ équivaut à étudier le signe de $(x\text{-}8)(x\text{+}8)$ car $x^2>0$ pour $x \in]0; 12]$.

De plus pour tout $x \in]0; 12], x + 8 > 0$.

Donc le signe de $C'_M(x)$ est le même que le signe de $x - 8$.

On a alors le tableau de variations suivant et on peut conclure que C_M atteint son minimum 19 pour $x = 8$.

x	0		8		12
Signe de $C'_M(x)$	‖	-	0	+	
Variations de C_M	‖	↘	19	↗	$\frac{61}{3}$

3. $C_m(8) = 2\times 8 + 3 = 19 = C_M(8)$.

Le coût marginal est égal au coût moyen lorsque le coût moyen est minimal.

Méthode

Pour justifier que le coût moyen est minimal pour x=8, on peut montrer que pour tout $x \in]0; 12]$, $C_M(x) \geq C_M(8)$.

L'égalité a lieu de manière évidente pour x=8.

Cela revient à vérifier que $C_M(8)$ est par définition le minimum.

Si la première démarche ne fonctionne pas, on peut alors étudier les variations de la fonction C_M sur]0 ;12].