Égalité pour tout x réel et équation

Exercice 1

$1^2+1-2=0$

$(-2)^2+(-2)-2=0$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{9}{4}$.

Les nombres 1 et – 2 sont donc solutions de l'équation $x^2+x-2=0$.

Le nombre $-\frac{1}{2}$ ne l'est pas.

Exercice 2

1. Présentons les résultats en tableau :

x	0	–2	–1
$(x-3)^2+4x$	9	17	12
$(x-1)^2+8$	9	17	12

2. On obtient les mêmes résultats pour $x=0$, $x=-2$ et $x=-1$.

Il est possible que pour tout x réel, $(x-3)^2+4x=(x-1)^2+8$, mais ce n'est pas certain. Des exemples ne suffisent pas à prouver une «égalité pour tout réel x».

Exercice 3

Pour $x=0$, on a : $3-(1-x)^2=3-1^2=2$

$A(0)=0^2-2\times 0-2=-2$

$B(0)=1$; $C(0)=2$; $D(0)=2$

On est donc sûr que les résultats $A(x)$ et $B(x)$ sont faux.

Les résultats $C(x)$ et $D(x)$ peuvent être justes mais ce n'est pas une certitude. Pour le savoir, il faudrait transformer ces expressions.

Résolutions graphiques

Exercice 4

a. L'équation $f(x)=2$ a pour seule solution 0.

b. L'équation $f(x)=-1$ a trois solutions.

c. L'équation $f(x)=0$ a trois solutions.

Exercice 5

a. Les solutions de l'équation $f(x)=2$ sont – 6 et 2.

b. Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont – 4 et 2.

c. Les solutions de l'équation $g(x)=3$ sont –2 et environ 1,3.

Transformer

Exercice 6

a. $2x^2+4x-5$ est développée.

b. $(2x+3)(x-5)+1$ n'est ni développée (il reste un produit à transformer) ni factorisée (ce n'est pas un produit mais une somme).

c. $(2x+3)(x-5)$ est factorisée.

d. $(2x+3)^2$ est factorisée : elle est écrite sous forme d'un produit car $(2x+3)^2=(2x+3)(2x+3)$.

Exercice 7 Développer

a. $3(x+2)=3x+6$

b. $(2x-5)(3x+6)=6x^2+12x-15x-30$

$(2x-5)(3x+6)=6x^2-3x-30$

c. Il s'agit d'une forme $(a-b)^2$:

$(5y-2)^2=(5y)^2-2\times 5y\times 2+2^2$

$(5y-2)^2=25y^2-20y+4$

d. Il s'agit d'une forme $(a+b)(a-b)$:

$(3t+6)(3t-6)=(3t)^2-6^2=9t^2-36$

Exercice 8 Développer

a. $2x-x(3-x)=2x-3x+x^2=x^2-x$

b. $4-2(x+3)^2=4-2(x^2+6x+9)$

$4-2(x+3)^2=-2x^2-12x-14$

c. On enlève d'abord les crochets en reconnaissant une forme $(a\times b)^2$: $(a\times b)^2=a^2\times b^2$:

$[3(2x-1)]^2=3^2(2x-1)^2=9(2x-1)^2$

On transforme ensuite $(2x-1)^2$ en reconnaissant une forme $(a-b)^2$

$[3(2x-1)]^2=9(4x^2-4x+1)$

$[3(2x-1)]^2=36x^2-36x+9$

d. $(x+3)^2-(x-2)^2$ se développe en

$(x^2+6x+9)-(x^2-4x+4)=10x+5$

Exercice 9 Développer

a. $2(3x-1)^2=2(9x^2-6x+1)$

$2(3x-1)^2=18x^2-12x+2$

b. $(2y-5)(4y+2)-2y(6-y)$ donne

$8y^2+4y-20y-10-12y+2y^2$

soit après réduction $10y^2-28y-10$

c. $\left(3t+\sqrt{5}\right)^2-2(t+\sqrt{5})$ donne

$9t^2+6t\sqrt{5}+\ 5-2t-2\sqrt{5}$
d'où en réduisant,
$9t^2+\left(6\sqrt{5}-2\right)t+5-2\sqrt{5}$

d. $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2+\ 4x=9x^2-2x+\frac{1}{9}+4x$
$\left(3x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\ 4x=9x^2+2x+\dfrac{1}{9}$

Exercice 10 Factoriser en reconnaissant un facteur commun

a. $x\times y+x\times z=x\times(y+z)$

b. $a\times(b+4)+3\times a=a\times(b+4+3)$
$a\times(b+4)+3\times a=a\times(b+7)$

c. $5\times(2t+1)+(2t+1)\times(t-5)$ donne
$(2t+1)\times(5+t-5)=(2t+1)t$

d. $5x^2+6x=5\times x\times x+6x=x(5x+6)$

e. $(\ x+1)^2-3(x+1)$ s'écrit encore
$(x+1)\times(x+1)-3(x+1)$ et se factorise en
$(x+1)\times[(x+1)-3]=(x+1)(x-2)$

Exercice 11 Factoriser en reconnaissant une identité remarquable

a. On reconnaît une forme a^2-b^2:
$(x+1)^2-25 = x+1-5)(x+1+5)$
$(x+1)^2-25=(x-4)(x+6)$

b. On reconnaît une forme $a^2-2ab+b^2$:
$9x^2-6x+1=(3x-1)^2$

c. On reconnaît une forme a^2-b^2:
$(2-3x)^2-\ 9=(2-3x-3)(2-3x+3)$
$(x+1)^2-\ 9=(-1-3x)(5-3x)$
Que l'on peut aussi écrire
$(x+1)^2-\ 9=(3x+1)(3x-5)$

d. $16(x+1)^2-25x^2$ s'écrit encore sous la forme
$[4(x+1)]^2-(5x)^2$.
On reconnaît alors une forme a^2-b^2:
$[4(x+1)]^2-(5x)^2$ devient donc
$[4(x+1)-5x]\times[4(x+1)+5x]$ soit encore
$[4x+4-5x]\times[4x+4+5x]$
et en réduisant :
$16(x+1)^2-25x^2=(-x+4)(9x+4)$

Exercice 12 Factoriser par étapes

a. $a(b+1)+bc+c = a(b+1)+c(b+1)$
qui permet de faire apparaître un facteur commun :
$a(b+1)+bc+c = (b+1)(a+c)$

b. On factorise $(2x-1)^2-16$ (forme a^2-b^2) :
$(2x-1-4)(2x-1+4)=(2x-5)(2x+3)$
En remplaçant dans $(2x-1)^2-16+3(2x-5)$ on obtient :
$(2x-5)(2x+3)+3(2x-5)$
Que l'on peut factoriser en
$(2x-5)(2x+3+3)=(2x-5)(2x+6)$.
On obtient donc comme factorisation :
$(2x-1)^2-16+3(2x-5) = (2x-5)(2x+6)$.
que l'on peut encore écrire
$(2x-1)^2-16+3(2x-5) = 2(2x-5)(x+3)$.

c. $xz-z+(x-1)^2=z(x-1)+(x-1)^2$
$xz-z+(x-1)^2=(x-1)[z+(x-1)]$
D'où $xz-z+(x-1)^2=(x-1)(z+x-1)$

d. $2a^2-4ab+2b^2 = 2(a^2-2ab+b^2)$
$2a^2-4ab+2b^2 = 2(a-b)^2$

Exercice 13

a. $2x(x+3)-5x=x[2(x+3)-5]$
$2x(x+3)-5x=x(2x+1)$

b. $25-(4x+6)^2$ est de la forme a^2-b^2 et se factorise en $[5-(4x+6)][5+(4x+6]$
soit $[5-4x-6][5+4x+6]$. D'où
$25-(4x+6)^2=(-4x-1)(4x+11)$

c. $(2-x)^2-16x^2=(2-x)^2-(4x)^2$
On reconnaît ainsi une forme a^2-b^2 que 'lon factorise en $[(2-x)-4x][(2-x)+4x]$
D'où $(2-x)^2-16x^2=(2-5x)(2+3x)$

d. $49x^2-14x+1$ est de la forrme $a^2-2ab+b^2$.
$49x^2-14x+1=(7x-1)^2$

Exercice 14

a. $4x^2+x=4x\times x+x\times 1=x(4x+1)$

b. On factorise par étapes :
$2(x+3)^2-2x-6=2(x+3)^2-2(x+3)$
On reconnaît donc $(x+3)$ comme facteur commun :
$2(x+3)^2-2(x+3)=(x+3)[2(x+3)-2]$
D'où la factorisation :
$2(x+3)^2-2x-6=(x+3)(2x+4)$
que l'on peut encore écrire
$2(x+3)^2-2x-6=2(x+3)(x+2)$

c. $4x^3-\ 8x^2+4x=\ 4x(x^2-2x+1)$.
Cette expression est bien factorisée, mais on s'aperçoit qu'on peut la factoriser davantage en reconnaissant
$x^2-2x+1=(x-1)^2$.
D'où $4x^3-\ 8x^2+4x = 4x(x-1)^2$

d. On reconnaît une forme $a^2 + 2ab + b^2$:
$\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = (\frac{1}{2}x + 1)^2$

Exercice 15 Vrai ou faux ?

a. L'affirmation est vraie. Pour la démontrer, transformons le membre de gauche en le développant pour obtenir le membre de droite :
Pour tout réel x,
$2x(x+3) - 5(x+4) = 2x^2 + 6x - 5x - 20$
Donc $2x(x+3) - 5(x+4) = 2x^2 + x - 20$ pour tout réel x.

b. L'affirmation est vraie. Pour la démontrer, transformons le membre de droite en le développant pour obtenir le membre de gauche :
Pour tout réel x,
$(x+5)^2 - 25 = (x^2 + 10x + 25) - 25$
$(x+5)^2 - 25 = x^2 + 10x$
Donc $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 10$ pour tout réel x.

c. L'affirmation est fausse. Pour le démontrer, il suffit de donner un contre-exemple :
Pour $x = -1$, $(x+1)^2 = 0^2 = 0$
et $x^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2$
On n'a donc pas $(x+1)^2 = x^2 + 1$ pour tout x réel.

d. L'affirmation est vraie. Pour le montrer, transformons les deux membres en les développant :
$2(x+3)^2 + 7 = 2(x^2 + 6x + 9) + 7$
$2(x+3)^2 + 7 = 2x^2 + 12x + 25$
D'autre part,
$(2x+8)(x+2) + 9 = 2x^2 + 4x + 8x + 16 + 9$
$(2x+8)(x+2) + 9 = 2x^2 + 12x + 25$
On constate que pour tout x réel, $2(x+3)^2 + 7$ et $(2x+8)(x+2) + 9$ sont égaux à $2x^2 + 12x + 25$.
On en déduit donc que
$2(x+3)^2 + 7 = (2x+8)(x+2) + 9$ pour tout réel x.

Équations du premier degré

Exercice 16
Seules les équations données en **a.** et **d.** sont des équations du premier degré

Exercice 17
Seules les équations **b.** et **c.** se ramènent à une équation du premier degré après simplification des termes en x^2.

Exercice 18

a. $2x - 5 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x + x = 4 + 5$
$2x - 5 = -x + 4 \Leftrightarrow 3x = 9$
$2x - 5 = -x + 4 \Leftrightarrow x = 3$
La solution est 3.

b. $2(3x+4) = 1 - 3x \Leftrightarrow 6x + 8 = 1 - 3x$
$2(3x+4) = 1 - 3x \Leftrightarrow 6x + 3x = 1 - 8$
$2(3x+4) = 1 - 3x \Leftrightarrow 9x = -7$
$2(3x+4) = 1 - 3x \Leftrightarrow x = -\frac{7}{9}$
La solution est $-\frac{7}{9}$.

c. $x + 2 = 7 + 4x \Leftrightarrow x - 4x = 7 - 2$
$x + 2 = 7 + 4x \Leftrightarrow -3x = 5$
$x + 2 = 7 + 4x \Leftrightarrow x = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$
La solution est $-\frac{5}{3}$.

d. $\frac{2}{3}x - 1 = x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - x = \frac{4}{3} + 1$
$\frac{2}{3}x - 1 = x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = \frac{7}{3}$
Pour trouver x, on divise par $-\frac{1}{3}$:
$\frac{2}{3}x - 1 = x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}}$
$\frac{2}{3}x - 1 = x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \times (-3) = -7$
La solution est -7.

Exercice 19

a. $2x - 7 = -4x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6x = \frac{19}{3}$
$2x - 7 = -4x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{19}{3}}{6} = \frac{19}{3} \times \frac{1}{6}$
$2x - 7 = -4x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{19}{18}$
La solution est $\frac{19}{18}$.

b. On multiplie chaque membre par 2 :
$\frac{2x-3}{2} = 3 \Leftrightarrow 2x - 3 = 2 \times 3$
$\frac{2x-3}{2} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$
La solution est $\frac{9}{2}$.

c. $-x + 5 = -\frac{x}{7} + 2 \Leftrightarrow -\frac{6}{7}x = -3$
$-x + 5 = -\frac{x}{7} + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{-\frac{6}{7}} = 3 \times \frac{7}{6}$
$-x + 5 = -\frac{x}{7} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$
La solution est $\frac{7}{2}$.

d. On multiplie chaque membre par 3 :
$\frac{3x+4}{3} = x - 1 \Leftrightarrow 3x + 4 = 3(x-1)$
$\frac{3x+4}{3} = x - 1 \Leftrightarrow 3x + 4 = 3x - 3$
$\frac{3x+4}{3} = x - 1 \Leftrightarrow 0 = 7$
Il n'y a aucune valeur de x pour laquelle on ait $0 = 7$. Il n'y a donc aucune valeur de x telle que $\frac{3x+4}{3} = x - 1$. Cette équation n'a pas de solution !

Autres équations

Exercice 20

On peut appliquer la «propriété du produit nul» aux équations données en **a.** et **d**.
En **b.,** le premier membre est bien un produit mais le second membre n'est pas nul :on ne peut appliquer directement cette propriété.
En **c**. le premier membre n'est pas un produit mais une différence de deux termes, donc on ne peut pas appliquer cette propriété.

Conseil
Pour toutes les équations des exercices 21 à 26, on peut contrôler graphiquement à l'aide de la calculatrice les solutions trouvées.

Exercice 21

a. Il s'agit d'un produit qui est nul :
$(4-x)(x+2) = 0 \Leftrightarrow 4 - x = 0$ OU $x + 2 = 0$
$(4-x)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ OU $x = -2$
Les solutions sont 4 et -2.

b. $(x+5)(6-2x) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0$ OU $6 - 2x = 0$
$(x+5)(6-2x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ OU $x = 3$
Les solutions sont -5 et 3.

c. Factorisons le premier membre :
$(2x-1)^2 - x^2 = (2x - 1 - x)(2x - 1 + x)$
$(2x-1)^2 - x^2 = (x-1)(3x-1)$
Par conséquent,
$(2x-1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1) = 0$
On peut ici appliquer la "propriété du produit nul" :
$(2x-1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ OU $3x - 1 = 0$
D'où
$(2x-1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ OU $x = \frac{1}{3}$
Les solutions sont 1 et $\frac{1}{3}$.

d. Factorisons le premier membre :
$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$
On peut appliquer la "propriété du produit nul" :
$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ OU $x - 3 = 0$
$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ OU $x = 3$
Les solutions sont 0 et 3.

Exercice 22

a. Rassemblons tous les termes dans le premier membre pour que le second membre soit nul :
$4x^2 = 3x \Leftrightarrow 4x^2 - 3x = 0$
Factorisons le premier membre :
$4x^2 = 3x \Leftrightarrow x(4x-3) = 0$
On peut désormais appliquer la "propriété du produit nul" :
$4x^2 = 3x \Leftrightarrow x = 0$ OU $4x - 3 = 0$
$4x^2 = 3x \Leftrightarrow x = 0$ OU $x = \frac{3}{4}$
Les solutions sont 0 et $\frac{3}{4}$.

b. On utilise la même démarche :
$(x+1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 4x^2 = 0$
On factorise :
$(x+1)^2 - 4x^2 = (x + 1 - 2x)(x + 1 + 2x)$
$(x+1)^2 - 4x^2 = (-x+1)(3x+1)$
Par conséquent,
$(x+1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow (-x+1)(3x+1) = 0$
$(x+1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow -x + 1 = 0$ OU $3x + 1 = 0$
$(x+1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = 1$ OU $x = -\frac{1}{3}$
Les solutions sont 1 et $-\frac{1}{3}$.

c. $4x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x-1) = 0$
$4x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ OU $4x - 1 = 0$
$4x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ OU $x = \frac{1}{4}$
Les solutions sont 0 et $1/4$.

d. $2x^2 + 6x = 2x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0$
$2x^2 + 6x = 2x - 2 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) = 0$
$2x^2 + 6x = 2x - 2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 0$
Or $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$.
Donc $(x+1)^2 = 0$ équivaut à $x + 1 = 0$.
$2x^2 + 6x = 2x - 2 \Leftrightarrow x + 1 = 0$
$2x^2 + 6x = 2x - 2 \Leftrightarrow x = -1$
L'équation n'a qu'une solution : -1.

Exercice 23 Choisir la bonne forme

a. On peut choisir n'importe quelle forme pour calculer $f(0)$, mais le calcul est plus simple avec la forme développée (forme A).
b. On choisit la forme B pour appliquer la «propriété du produit nul».
c. On choisit la forme C pour obtenir un produit nul après avoir rassemblé tous les termes dans le premier membre :
$f(x) = -1 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 1 = -1$
$f(x) = -1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$

Exercice 24 Choisir la bonne forme

1. On développe l'expression connue de $f(x)$(forme A) :
Pour tout réel x,
$(2-x)(x-6) = 2x - 12 - x^2 + 6x$
$(2-x)(x-6) = -x^2 + 8x - 12$
On en déduit que pour tout réel x,
$f(x) = -x^2 + 8x - 12$ (forme B)

On développe la forme C proposée :
$4 - (x-4)^2 = 4 - (x^2 - 8x + 16)$
$4 - (x-4)^2 = -x^2 + 8x - 12$
On retrouve la forme B.
Donc pour tout x réel, $f(x) = 4 - (x-4)^2$
(forme C).
Remarque : on aurait pu aussi factoriser la forme C pour retrouver la forme A en reconnaissant une forme $a^2 - b^2$.

2. a. $f(0) = -12$ (forme B)

b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)(x-6) = 0$ (forme A)
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0$ OU $x - 6 = 0$
Les solutions sont 2 et 6.

c. $f(x) = 4 \Leftrightarrow 4 - (x-4)^2 = 4$ (forme C)
$f(x) = 4 \Leftrightarrow -(x-4)^2 = 0$
$f(x) = 4 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$
$f(x) = 4 \Leftrightarrow x - 4 = 0$
La solution est 4.

Exercice 25 Choisir la bonne forme

1. Chercher les points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses c'est chercher les points M $(x\,;0)$ de la courbe représentative de f.
On résout donc l'équation $f(x) = 0$ à l'aide de la forme factorisée (forme C)
$(x-18)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x - 18 = 0$ OU $x + 2 = 0$.
Les solutions sont 18 et -2.
La courbe C_f coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(18; 0)$ et $(-2\,; 0)$.

2. Le point d'intersection de C_f et de l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0; f(0))$.
Avec la forme développée (forme B), on a
$f(0) = -36$..
La courbe C_f coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; -36)$.

3. On résout donc l'équation $f(x) = -64$ à l'aide de la forme factorisée (forme A) qui va permettre de factoriser le premier membre après avoir rassemblé tous les termes dans ce premier membre :
$f(x) = -64 \Leftrightarrow -100 + (x-8)^2 = -64$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow -36 + (x-8)^2 = 0$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow (x-8)^2 - 36 = 0$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow (x-8-6)(x-8+6) = 0$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow (x-14)(x-2) = 0$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow x - 14 = 0$ OU $x - 2 = 0$
Les solutions sont 14 et 2.
La courbe C_f coupe la droite d'équation $y = -64$ aux points de coordonnées $(14\,; -64)$ et $(2; -64)$.

Exercice 26

a. $\frac{x+4}{3-x} = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0$ avec $3 - x \neq 0$
$\frac{x+4}{3-x} = 0 \Leftrightarrow x = -4$ avec $x \neq 3$
L'équation a une unique solution : -4.

b. $\frac{2x+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ avec $x + 2 \neq 0$
$\frac{2x+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ avec $x \neq -2$
L'équation a une unique solution : $-\frac{1}{2}$.

c. $\frac{x+5}{3x} = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0$ avec $3x \neq 0$
$\frac{x+5}{3x} = 0 \Leftrightarrow x = -5$ avec $x \neq 0$
L'équation a une unique solution : -5.