# Égalité pour tout $x$ réel et équation

## Exercice 1

$1^2 + 1 - 2 = 0$ ; $(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$ ; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{9}{4}$.

Les nombres $1$ et $-2$ sont donc solutions de l'équation $x^2 + x - 2 = 0$.

Le nombre $-\frac{1}{2}$ ne l'est pas.

# Égalité pour tout $x$ réel et équation

### Exercice 2

**1.** Présentons les résultats en tableau :

| $x$ | 0 | −2 | −1 |
|---|---|---|---|
| $(x-3)^2+4x$ | 9 | 17 | 12 |
| $(x-1)^2+8$ | 9 | 17 | 12 |

**2.** On obtient les mêmes résultats pour $x=0$, $x=-2$ et $x=-1$.
Il est possible que pour tout $x$ réel, $(x-3)^2+4x=(x-1)^2+8$, mais ce n'est pas certain.

Des exemples ne suffisent pas à prouver une « égalité pour tout réel $x$ ».

# Égalité pour tout $x$ réel et équation

### Exercice 3

Pour $x = 0$, on a :
$3 - (1-x)^2 = 3 - 1^2 = 2$
$A(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 2 = -2$
$B(0) = 1$ ; $C(0) = 2$ ; $D(0) = 2$

On est donc sûr que les résultats $A(x)$ et $B(x)$ sont faux.
Les résultats $C(x)$ et $D(x)$ peuvent être justes mais ce n'est pas une certitude.
Pour le savoir, il faudrait transformer ces expressions.

## Résolutions graphiques

### Exercice 4

**a.** L'équation $f(x) = 2$ a pour seule solution 0.

**b.** L'équation $f(x) = -1$ a trois solutions.

**c.** L'équation $f(x) = 0$ a trois solutions.

## Résolutions graphiques

### Exercice 5

**a.** Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont $-6$ et $2$.

**b.** Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $-4$ et $2$.

**c.** Les solutions de l'équation $g(x) = 3$ sont $-2$ et environ 1,3.

# Transformer

### Exercice 6

**a.** $2x^2 + 4x - 5$ est développée.

**b.** $(2x + 3)(x - 5) + 1$ n'est ni développée (il reste un produit à transformer) ni factorisée
(ce n'est pas un produit mais une somme).

**c.** $(2x + 3)(x - 5)$ est factorisée.

**d.** $(2x + 3)^2$ est factorisée : elle est écrite sous forme d'un produit car
$(2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3)$.

## Transformer

### Exercice 7

**a.** $3(x+2) = 3x+6$

**b.** $(2x-5)(3x+6) = 6x^2+12x-15x-30 = 6x^2-3x-30$

**c.** Il s'agit d'une forme $(a-b)^2$:
$(5y-2)^2 = (5y)^2 - 2\times 5y\times 2 + 2^2 = 25y^2 - 20y + 4$

**d.** Il s'agit d'une forme $(a+b)(a-b)$:
$(3t+6)(3t-6) = (3t)^2 - 6^2 = 9t^2 - 36$

# Transformer

### Exercice 8

**a.** $2x - x(3 - x) = 2x - 3x + x^2 = x^2 - x$

**b.** $4 - 2(x + 3)^2 = 4 - 2(x^2 + 6x + 9) = -2x^2 - 12x - 14$

**c.** On enlève d'abord les crochets en reconnaissant une forme $(a \times b)^2$ : $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$

$[3(2x - 1)]^2 = 3^2\,(2x - 1)^2 = 9(2x - 1)^2$

On développe ensuite $(2x - 1)^2$ en reconnaissant une forme $(a - b)^2$

$[3(2x - 1)]^2 = 9(4x^2 - 4x + 1) = 36x^2 - 36x + 9$

**d.** $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 4x + 4) = 10x + 5$

# Transformer

## Exercice 9

**a.** $2(3x-1)^2 = 2(9x^2-6x+1) = 18x^2-12x+2$

**b.** $(2y-5)(4y+2)-2y(6-y) = 8y^2+4y-20y-10-12y+2y^2$
$= 10y^2-28y-10$

**c.** $\left(3t+\sqrt{5}\right)^2 - 2(t+\sqrt{5}) = 9t^2+6t\sqrt{5}+5-2t-2\sqrt{5} = 9t^2+\left(6\sqrt{5}-2\right)t+5-2\sqrt{5}$

**d.** $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2 + 4x = 9x^2-2x+\frac{1}{9}+4x = 9x^2+2x+\frac{1}{9}$

# Transformer

### Exercice 10

**a.** $x \times y + x \times z = x \times (y + z)$

**b.** $a \times (b + 4) + 3 \times a = a \times (b + 4 + 3) = a \times (b + 7)$

**c.** $5 \times (2t + 1) + (2t + 1) \times (t - 5) = (2t + 1) \times (5 + t - 5) = (2t + 1)t$

**d.** $5x^2 + 6x = 5 \times x \times x + 6x = x(5x + 6)$

**e.** $(x + 1)^2 - 3(x + 1)$ s'écrit encore $(x + 1) \times (x + 1) - 3(x + 1)$
et se factorise en $(x + 1) \times [(x + 1) - 3] = (x + 1)(x - 2)$

# Transformer

### Exercice 11

**a.** On reconnaît une forme $a^2 - b^2$:
$(x+1)^2 - 25 = x + 1 - 5)(x + 1 + 5) = (x - 4)(x + 6)$

**b.** On reconnaît une forme $a^2 - 2ab + b^2$:
$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$

**c.** On reconnaît une forme $a^2 - b^2$:
$(2 - 3x)^2 - 9 = (2 - 3x - 3)(2 - 3x + 3) = (-1 - 3x)(5 - 3x)$
que l'on peut aussi écrire $(x+1)^2 - 9 = (3x + 1)(3x - 5)$

**d.** $16(x+1)^2 - 25x^2$ s'écrit encore sous la forme $[4(x+1)]^2 - (5x)^2$.
On reconnaît alors une forme $a^2 - b^2$:
$$\begin{aligned}[4(x+1)]^2 - (5x)^2 &= [4(x+1) - 5x] \times [4(x+1) + 5x] \\ &= [4x + 4 - 5x] \times [4x + 4 + 5x]\end{aligned}$$
Soit en réduisant :
$16(x+1)^2 - 25x^2 = (-x + 4)(9x + 4)$

# Transformer

### Exercice 12

**a.** $a(b+1)+bc+c=a(b+1)+c(b+1)$
Ceci permet de faire apparaître un facteur commun : $a(b+1)+bc+c=(b+1)(a+c)$

**b.** On factorise $(2x-1)^2-16$ (forme $a^2-b^2$) :
$(2x-1-4)(2x-1+4)=(2x-5)(2x+3)$
En remplaçant dans $(2x-1)^2-16+3(2x-5)$ on obtient :
$(2x-1)^2-16+3(2x-5)=(2x-5)(2x+3)+3(2x-5)=(2x-5)(2x+3+3)$
On obtient donc comme factorisation :
$(2x-1)^2-16+3(2x-5)=(2x-5)(2x+6)$
que l'on peut encore écrire
$(2x-1)^2-16+3(2x-5)=2(2x-5)(x+3)$.

**c.** $xz-z+(x-1)^2=z(x-1)+(x-1)^2$
$xz-z+(x-1)^2=(x-1)[z+(x-1)]=(x-1)(z+x-1)$

**d.** $2a^2-4ab+2b^2=2(a^2-2ab+b^2)=2(a-b)^2$

# Transformer

### Exercice 13

**a.** $2x(x+3)-5x = x[2(x+3)-5] = x(2x+1)$

**b.** $25-(4x+6)^2$ est de la forme $a^2-b^2$ :
$25-(4x+6)^2 = [5-(4x+6)][5+(4x+6)] = [5-4x-6][5+4x+6]$.
D'où $25-(4x+6)^2 = (-4x-1)(4x+11)$

**c.** $(2-x)^2-16x^2 = (2-x)^2-(4x)^2$
On reconnaît ainsi une forme $a^2-b^2$ que l'on factorise :
$(2-x)^2-16x^2 = [(2-x)-4x][(2-x)+4x] = (2-5x)(2+3x)$

**d.** $49x^2-14x+1$ est de la forme $a^2-2ab+b^2$ :
$49x^2-14x+1 = (7x-1)^2$

# Transformer

### Exercice 14

**a.** $4x^2 + x = 4x \times x + x \times 1 = x(4x + 1)$

**b**. On factorise par étapes :
$2(x+3)^2 - 2x - 6 = 2(x+3)^2 - 2(x+3)$
On reconnaît maintenant $(x+3)$ comme facteur commun :
$2(x+3)^2 - 2(x+3) = (x+3)[2(x+3) - 2] = (x+3)(2x+4)$
que l'on peut encore écrire
$2(x+3)^2 - 2x - 6 = 2(x+3)(x+2)$.

**c.** $4x^3 - 8x^2 + 4x = 4x(x^2 - 2x + 1)$.
Cette expression est bien factorisée, mais on s'aperçoit qu'on peut la factoriser davantage en reconnaissant $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.
D'où $4x^3 - 8x^2 + 4x = 4x(x-1)^2$

**d.** On reconnaît une forme $a^2 + 2ab + b^2$:
$\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = (\frac{1}{2}x + 1)^2$

# Transformer

### Exercice 15

**a.** L'affirmation est vraie.
Pour la démontrer, transformons le membre de gauche en le développant pour obtenir le membre de droite :
Pour tout réel $x$, $2x(x+3)-5(x+4)=2x^2+6x-5x-20$
Donc $2x(x+3)-5(x+4)=2x^2+x-20$ pour tout réel $x$.

**b.** L'affirmation est vraie.
Pour la démontrer, transformons le membre de droite en le développant pour obtenir le membre de gauche :
Pour tout réel $x$, $(x+5)^2-25=(x^2+10x+25)-25=x^2+10x$.
Donc $x^2+10x=(x+5)^2-10$ pour tout réel $x$.

**c.** L'affirmation est fausse.
Pour le démontrer, il suffit de donner un contre-exemple :
Pour $x=-1$, $(x+1)^2=0^2=0$ et $x^2+1=(-1)^2+1=2$
L'affirmation « $(x+1)^2=x^2+1$ pour tout $x$ réel » est donc fausse.

**d.** L'affirmation est vraie.
Pour le montrer transformons les deux membres en les développant :
$2(x+3)^2+7=2(x^2+6x+9)+7=2x^2+12x+25$
D'autre part,
$(2x+8)(x+2)+9=2x^2+4x+8x+16+9=2x^2+12x+25$
On constate que pour tout $x$ réel, $2(x+3)^2+7$ et $(2x+8)(x+2)+9$ sont égaux à $2x^2+12x+25$.
On en déduit donc que $2(x+3)^2+7=(2x+8)(x+2)+9$ pour tout réel $x$.

## Équations du premier degré

### Exercice 16

Seules les équations données en **a.** et **d.** sont des équations du premier degré.

## Équations du premier degré

### Exercice 17

Seules les équations **b.** et **c.** se ramènent à une équation du premier degré après simplification des termes en $x^2$.

# Équations du premier degré

### Exercice 18

**a.** $2x - 5 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x + x = 4 + 5$
$\Leftrightarrow 3x = 9$
$\Leftrightarrow x = 3$

La solution est 3.

**b.** $2(3x + 4) = 1 - 3x \Leftrightarrow 6x + 8 = 1 - 3x$
$\Leftrightarrow 6x + 3x = 1 - 8$
$\Leftrightarrow 9x = -7$
$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{9}$

La solution est $-\frac{7}{9}$.

**c.** $x + 2 = 7 + 4x \Leftrightarrow x - 4x = 7 - 2$
$\Leftrightarrow -3x = 5$
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$

La solution est $-\frac{5}{3}$.

**d.** $\frac{2}{3}x - 1 = x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - x = \frac{4}{3} + 1$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = \frac{7}{3}$

Pour trouver $x$, on divise par $-\frac{1}{3}$ :

$\frac{2}{3}x - 1 = x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}}$
$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \times (-3) = -7$

La solution est $-7$.

# Équations du premier degré

### Exercice 19

**a**. $2x - 7 = -4x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6x = \frac{19}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{19}{3}}{6} = \frac{19}{3} \times \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{19}{18}$

La solution est $\frac{19}{18}$.

**b**. On multiplie chaque membre par 2 :

$\frac{2x-3}{2} = 3 \Leftrightarrow 2x - 3 = 2 \times 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

La solution est $\frac{9}{2}$.

**c.** $-x + 5 = -\frac{x}{7} + 2 \Leftrightarrow -\frac{6}{7}x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{-\frac{6}{7}} = 3 \times \frac{7}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

La solution est $\frac{7}{2}$.

**d.** On multiplie chaque membre par 3 :

$\frac{3x+4}{3} = x - 1 \Leftrightarrow 3x + 4 = 3(x-1) \Leftrightarrow 3x + 4 = 3x - 3$

On obtient donc $\frac{3x+4}{3} = x - 1 \Leftrightarrow 0 = 7$.

Il n'y a aucune valeur de $x$ pour laquelle on ait $0 = 7$.

Il n'y a donc aucune valeur de $x$ telle que $\frac{3x+4}{3} = x - 1$.

Cette équation n'a pas de solution !

## Autres équations

### Exercice 20

On peut appliquer la « propriété du produit nul » aux équations données en **a.** et **d**.
En **b.,** le premier membre est bien un produit mais le second membre n'est pas nul : on ne peut appliquer directement cette propriété.
En **c**. le premier membre n'est pas un produit mais une différence de deux termes, donc on ne peut pas appliquer cette propriété.

Conseil
Pour toutes les équations des exercices 21 à 26 on peut contrôler graphiquement à l'aide de la calculatrice les solutions trouvées.

# Autres équations

### Exercice 21

**a.** Il s'agit d'un produit qui est nul :
$(4-x)(x+2)=0 \Leftrightarrow 4-x=0$ ou $x+2=0 \Leftrightarrow x=4$ ou $x=-2$
Les solutions sont 4 et $-2$.

**b.** Par la « propriété du produit nul » :
$(x+5)(6-2x)=0 \Leftrightarrow x+5=0$ ou $6-2x=0 \Leftrightarrow x=-5$ ou $x=3$
Les solutions sont $-5$ et $3$.

**c.** Factorisons le premier membre :
$(2x-1)^2-x^2=(2x-1-x)(2x-1+x)=(x-1)(3x-1)$
Par conséquent,
$(2x-1)^2-x^2=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1)=0$
On peut ici appliquer la "propriété du produit nul" :
$(2x-1)^2-x^2=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $3x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{1}{3}$
Les solutions sont 1 et $\frac{1}{3}$.

**d.** Factorisons le premier membre :
$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0$
On peut appliquer la "propriété du produit nul" :
$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x-3=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$
Les solutions sont $0$ et $3$.

## Autres équations

### Exercice 22

**a.** Rassemblons tous les termes dans le premier membre pour que le second membre soit nul :
$4x^2 = 3x \iff 4x^2 - 3x = 0$
Factorisons le premier membre :
$4x^2 = 3x \iff x(4x - 3) = 0$
On peut désormais appliquer la "propriété du produit nul" :
$4x^2 = 3x \iff x = 0$ ou $4x - 3 = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{3}{4}$
Les solutions sont 0 et $\frac{3}{4}$.

**b.** On utilise la même démarche :
$(x+1)^2 = 4x^2 \iff (x+1)^2 - 4x^2 = 0$
On factorise :
$(x+1)^2 - 4x^2 = (x + 1 - 2x)(x + 1 + 2x) = (x+1)^2 - 4x^2 = (-x+1)(3x+1)$
Par conséquent,
$(x+1)^2 = 4x^2 \iff (-x+1)(3x+1) = 0 \iff -x + 1 = 0$ ou $3x + 1 = 0$
$(x+1)^2 = 4x^2 \iff x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$
Les solutions sont 1 et $-\frac{1}{3}$.

**c.** $4x^3 - x^2 = 0 \iff x^2(4x - 1) = 0 \iff x^2 = 0$ ou $4x - 1 = 0$

d'où
$4x^3 - x^2 = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{1}{4}$
Les solutions sont 0 et $\frac{1}{4}$.

**d.** $2x^2 + 6x = 2x - 2 \iff 2x^2 + 4x + 2 = 0$
$2x^2 + 6x = 2x - 2 \iff 2(x^2 + 2x + 1) = 0$
$2x^2 + 6x = 2x - 2 \iff 2(x+1)^2 = 0$
Or $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$.
Donc $(x+1)^2 = 0$ équivaut à $x + 1 = 0$ soit $x = -1$
L'équation n'a qu'une solution : $-1$.

## Autres équations

### Exercice 23

**a.** On peut choisir n'importe quelle forme pour calculer $f(0)$, mais le calcul est plus simple avec la forme développée (forme A).

**b.** On choisit la forme B pour appliquer la « propriété du produit nul ».

**c.** On choisit la forme C pour obtenir un produit nul après avoir rassemblé tous les termes dans le premier membre et simplifié :
$f(x) = -1 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

## Autres équations

### Exercice 24

**1.** On développe l'expression connue de $f(x)$(forme A) :
Pour tout réel $x$, $(2-x)(x-6) = 2x - 12 - x^2 + 6x = -x^2 + 8x - 12$
On en déduit que pour tout réel $x$, $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ (forme B)

On développe la forme C proposée :
$4-(x-4)^2 = 4-(x^2-8x+16) = -x^2+8x-12$
On retrouve la forme B.
Donc pour tout $x$ réel, $f(x) = 4-(x-4)^2$ (forme C).
Remarque : on aurait pu aussi factoriser la forme C pour retrouver la forme A en reconnaissant une forme $a^2 - b^2$.

**2. a.** $f(0) = -12$ (forme B)

**b.** $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)(x-6) = 0$ (forme A)
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0$ ou $x-6=0$
Les solutions sont 2 et 6.

**c.** $f(x) = 4 \Leftrightarrow 4-(x-4)^2 = 4$ (forme C)
$f(x) = 4 \Leftrightarrow -(x-4)^2 = 0$
$f(x) = 4 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$
$f(x) = 4 \Leftrightarrow x-4 = 0$
La solution est 4.

## Autres équations

### Exercice 25

**1.** Chercher les points d'intersection de $C_f$ et de l'axe des abscisses c'est chercher les points M $(x\,;0)$ de la courbe représentative de $f$.
On résout donc l'équation $f(x) = 0$ à l'aide de la forme factorisée (forme C)
$(x-18)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-18=0$ ou $x+2=0$.
Les solutions sont 18 et – 2.
La courbe $C_f$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (18 ; 0) et (-2 ; 0).

**2.** Le point d'intersection de $C_f$ et de l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0\,;f(0))$.
Avec la forme développée (forme B), on a $f(0) = -36$..
La courbe $C_f$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; -36).

**3.** On résout donc l'équation $f(x) = -64$ à l'aide de la forme factorisée (forme A) qui va permettre de factoriser le premier membre après avoir rassemblé tous les termes dans ce premier membre :
$f(x) = -64 \Leftrightarrow -100 + (x-8)^2 = -64$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow -36 + (x-8)^2 = 0$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow (x-8)^2 - 36 = 0$ (forme $a^2 - b^2$)
$f(x) = -64 \Leftrightarrow (x-8-6)(x-8+6) = 0$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow (x-14)(x-2) = 0$
$f(x) = -64 \Leftrightarrow x-14=0$ ou $x-2=0$
Les solutions sont 14 et 2.
La courbe $C_f$ coupe la droite d'équation $y = -64$ aux points de coordonnées (14 ; –64) et (2 ; –64).

## Autres équations

### Exercice 26

**a.** $\frac{x+4}{3-x} = 0 \iff x + 4 = 0$ avec $3 - x \neq 0 \iff x = -4$ avec $x \neq 3$
L'équation a une unique solution : $-4$.

**b.** $\frac{2x+1}{x+2} = 0 \iff 2x + 1 = 0$ avec $x + 2 \neq 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ avec $x \neq -2$
L'équation a une unique solution : $-\frac{1}{2}$.

**c.** $\frac{x+5}{3x} = 0 \iff x + 5 = 0$ avec $3x \neq 0 \iff x = -5$ avec $x \neq 0$
L'équation a une unique solution : $-5$